Mathematatik-Olympiade – Schulrunde 2012

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 5

1. Aufgabe

Zeichne **zwei Kreise und zwei Geraden** so, dass die jeweilige Figur

a) genau neun Schnittpunkte aufweist,
b) genau zehn Schnittpunkte aufweist,
c) genau elf Schnittpunkte aufweist.
d) Ist es möglich, eine Figur aus zwei Kreisen und zwei Geraden mit elf Schnittpunkten zu zeichnen, wenn die Geraden senkrecht aufeinander stehen sollen?
Zeichne gegebenenfalls eine solche Figur.

Hinweis: Eine Gerade hat – im Unterschied zu einer Strecke – keine Endpunkte.

2. Aufgabe

Eine Zahl, die genau zwei Teiler hat, nämlich die 1 und sich selbst, heißt **Primzahl**.

a) Weise durch jeweils ein Beispiel nach, dass sich jede gerade Zahl von 4 bis 40 als Summe von zwei Primzahlen schreiben lässt. Die beiden Primzahlen müssen dabei nicht verschieden sein.

b) Stelle die Zahl 98 als Summe zweier Primzahlen dar.

3. Aufgabe

Da in diesem Jahr die 52. Mathematik-Olympiade stattfindet, hat sich Tim folgende Aufgabe gestellt: „Ich möchte auf Kästchenpapier 52 Kästchen so anordnen, dass sie in ein 8 × 8 – Quadrat mit 64 Kästchen passen."

a) Die Figur aus den 52 Kästchen in dem 8 × 8 – Quadrat soll symmetrisch mit genau zwei verschiedenen Spiegelachsen sein. Zeichne ein Beispiel und kennzeichne die Spiegelachsen.

b) Die Figur aus den 52 Kästchen in dem 8 × 8 – Quadrat soll symmetrisch mit genau vier verschiedenen Spiegelachsen sein. Zeichne ein Beispiel und kennzeichne die Spiegelachsen.

4. Aufgabe

Eine Disziplin beim Sportfest ist **Ballweitwurf**. Sechs Schüler warfen die folgenden Weiten:
Bea warf 6 m weiter als Annika, Annika wurde von Jens um 11 m übertroffen, Dominic warf genauso weit wie Jens, Annika fehlten 9 m an der Wurfweite von Paul, Meike schaffte 3 m mehr als Annika.
Sportlehrer Weitmüller sagt: „Insgesamt habt ihr 154 m geworfen."
Welche Wurfweite ergibt sich daraus für jedes Kind?

Abgabetermin: **Montag, 08. Oktober 2012**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Di / Mi / Fr, 7. Stunde

1. Treffen: **Freitag, 24. August 2012, 13.00 Uhr, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2012

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 6

1. Aufgabe

Eine Disziplin beim Sportfest ist **Ballweitwurf**. Sechs Schüler warfen die folgenden Weiten: Bea warf 6 m weiter als Annika, Annika wurde von Jens um 11 m übertroffen, Dominic warf genauso weit wie Jens, Annika fehlten 9 m an der Wurfweite von Paul, Meike schaffte 3 m mehr als Annika. Sportlehrer Weitmüller sagt: „Insgesamt habt ihr 154 m geworfen.“ Welche Wurfweite ergibt sich daraus für jedes Kind?

2. Aufgabe

Lukas hatte von seinem Großvater **20,12 €** in 1-Cent-Münzen geschenkt bekommen. Er schüttete die Münzen auf den Tisch; da lagen nun 2012 Münzen. Lukas begann, sie in Quadraten anzuordnen. Mit einiger Geduld hatte er nach einer Weile 30 Quadrate aus $8 \cdot 8$ Münzen, ein Quadrat aus $9 \cdot 9$ Münzen, ein Quadrat aus $3 \cdot 3$ Münzen – und die letzten beiden übrig bleibenden Münzen, so sagte er sich richtig, bilden ja zwei 1×1-Quadrate. Insgesamt hatte er also 34 Quadrate. Nun fragte er sich, ob man die 2012 Münzen nicht in deutlich weniger Quadraten anordnen könnte.

a) 2012 ist nun eine ziemlich große Zahl – er zerlegt zunächst die Zahlen von 1 bis 24 in Summen von möglichst wenigen Quadratzahlen. Gib jeweils eine solche Zerlegung für die Zahlen von 1 bis 24 an. (Beispiel: $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$)

b) Finde eine Darstellung der Zahl 2012 als Summe von vier Quadratzahlen.

3. Aufgabe

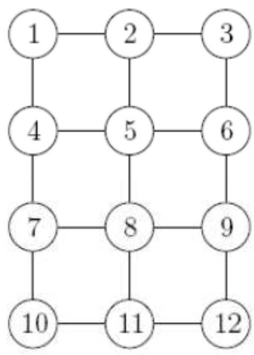
Linda hat eine Kiste mit vielen kleinen, gleich großen Holz-Spielwürfeln gefunden. Auf jedem Würfel stehen die Zahlen von 1 bis 6 in der üblichen Anordnung. Nun nimmt sie sich sieben Würfel, wählt einen von diesen aus und klebt auf jede Seitenfläche dieses Würfels einen anderen Würfel so, dass die quadratischen Flächen genau aufeinander liegen.

a) Wie viele quadratische Flächen begrenzen den so entstandenen Körper?

b) Linda überlegt, welche Summen aller sichtbaren Augenzahlen möglich sind. Gib zunächst die kleinste und die größte dieser Gesamtaugenzahlen an. Kann Linda auch jede dazwischen liegende Augenzahl „zusammenkleben“?

4. Aufgabe

Auf dem abgebildeten Spielplan spielen zwei Spieler mit zwei Steinen „Hase und Wolf“. Wolf und Hase ziehen abwechselnd, wobei der Wolf beginnt. Ein Zug besteht im Übergang auf ein benachbartes Feld. Zwei verschiedene Felder sind benachbart, wenn sie durch eine gerade Linie verbunden sind. Der Wolf gewinnt, wenn er nach spätestens 6 Zügen auf ein Feld gelangt, das der Hase gerade besetzt. Andernfalls gewinnt der Hase.



Es werden zwei Ausgangsstellungen a) und b) betrachtet:

a) Der Wolf steht auf dem Feld 1 und der Hase steht auf dem Feld 12.

b) Der Wolf steht auf dem Feld 1 und der Hase steht auf dem Feld 3.

Untersuche, in welchen der beiden Ausgangsstellungen der Wolf stets gewinnen kann, egal wie der Hase zieht.

Abgabetermin: **Montag, 08. Oktober 2012**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Di / Mi / Fr, 7. Stunde

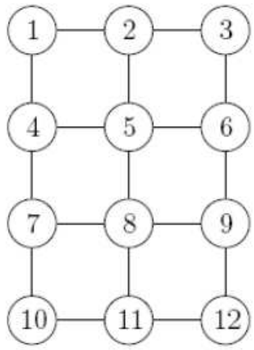
1. Treffen: **Freitag, 24. August 2012, 13.00 Uhr, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2012

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 7

1. Aufgabe



Auf dem abgebildeten Spielplan spielen zwei Spieler mit zwei Steinen „Hase und Wolf“. Wolf und Hase ziehen abwechselnd, wobei der Wolf beginnt. Ein Zug besteht im Übergang auf ein benachbartes Feld. Zwei verschiedene Felder sind benachbart, wenn sie durch eine gerade Linie verbunden sind. Der Wolf gewinnt, wenn er nach spätestens 6 Zügen auf ein Feld gelangt, das der Hase gerade besetzt. Andernfalls gewinnt der Hase.

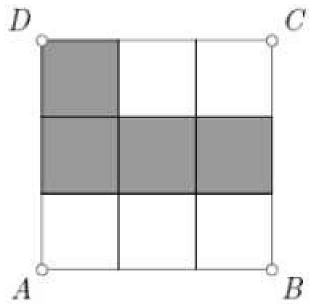
Es werden zwei Ausgangsstellungen a) und b) betrachtet:

a) Der Wolf steht auf dem Feld 1 und der Hase steht auf dem Feld 12.

b) Der Wolf steht auf dem Feld 1 und der Hase steht auf dem Feld 3.

Untersuche, in welchen der beiden Ausgangsstellungen der Wolf stets gewinnen kann, egal wie der Hase zieht.

2. Aufgabe



Die Abbildung zeigt ein Quadrat ABCD, das aus neun deckungsgleichen Quadraten besteht.

a) Die in der Abbildung dunkel eingefärbte Teilfläche des Quadrates ABCD habe einen Flächeninhalt von 36 cm^2. Berechne ihren Umfang.

b) Die in Abbildung dunkel eingefärbte Teilfläche des Quadrates ABCD habe nun einen Umfang von 20 cm. Ermittle, wie groß ihr Flächeninhalt ist.

3. Aufgabe

Professor Knobelfix hat einen Korb voller Äpfel und möchte sie einer Gruppe von Schülern schenken. Er sagt: „Wenn der Zweitjüngste einen Apfel mehr erhält als der Jüngste, der Drittjüngste wieder einen Apfel mehr erhält als der Zweitjüngste usw., dann bleibt kein Apfel übrig“. Er schlägt vor, die Äpfel genauso zu verteilen.

a) Die Schüler finden diese Aufteilung ungerecht und möchten, dass jeder von ihnen die gleiche Anzahl von ganzen Äpfeln erhalten soll. Zeige, dass die von den Schülern vorgeschlagene Aufteilung möglich ist, wenn die Gruppe aus 7 Schülern besteht.

b) Die Gruppe der Schüler, an die Professor Knobelfix Äpfel verschenken will, bestehe nun aus 5, 6 oder 8 Schülern. Untersuche, für welche dieser drei Anzahlen von Schülern eine Verteilung der Äpfel derart möglich ist, dass jeder Schüler die gleiche Anzahl von ganzen Äpfeln erhält.

4. Aufgabe

In einem Garten stehen zwei runde Tische; an einem haben drei Personen Platz, an dem anderen vier. Ein Mann, zwei Frauen und vier Kinder wollen sich an die beiden Tische setzen.

Bestimme die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die sieben Personen auf die beiden Tische zu verteilen. Dabei werden die einzelnen Personen nur nach Mann, Frau und Kind unterschieden. Ihre Platzierung am Tisch soll nicht berücksichtigt werden.

Abgabetermin: Montag, 08. Oktober 2012

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Di / Mi / Fr, 7. Stunde

1. Treffen: **Freitag, 24. August 2012, 13.00 Uhr, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2012

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 8

1. Aufgabe

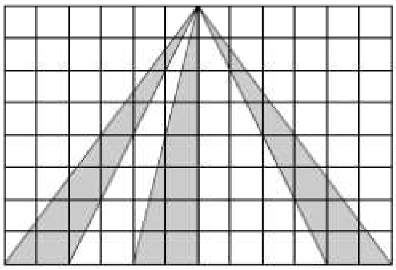
In einem Garten stehen zwei runde Tische; an einem haben drei Personen Platz, an dem anderen vier. Ein Mann, zwei Frauen und vier Kinder wollen sich an die beiden Tische setzen.

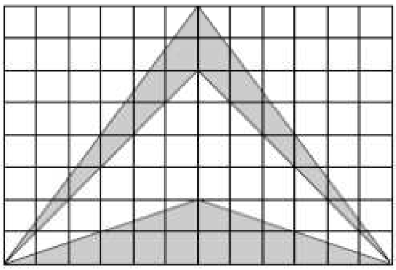
a) Bestimme die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die sieben Personen auf die beiden Tische zu verteilen. Dabei werden die einzelnen Personen nur nach Mann, Frau und Kind unterschieden. Ihre Platzierung am Tisch soll nicht berücksichtigt werden.

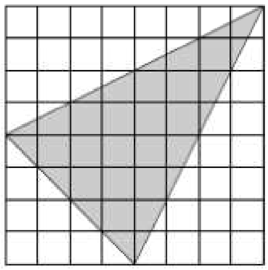
b) Bestimme die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die sieben Personen an den beiden Tischen zu platzieren. Dabei werden die Personen wieder nur nach Mann, Frau und Kind unterschieden. Zwei Platzierungen werden als gleich angesehen, wenn sie durch Weiterrücken oder durch Umkehrung der Reihenfolge auseinander hervorgehen.

2. Aufgabe

Berechne die Inhalte der drei grauen Flächen in der Abbildung und ermittle jeweils den Anteil an der Gesamtfläche. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Seitenlänge eines jeden der kleinen Quadrate des Rasters 1 cm beträgt.







3. Aufgabe

Ermittle alle Paare (a, b) aus positiven ganzen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Summe aus a und b beträgt 324.
(2) Der größte gemeinsame Teiler von a und b ist 36.
(3) Die Zahl a ist größer als die Zahl b.
(4) Die Zahl a ist nicht größer als das Doppelte von b.

4. Aufgabe

a) Beschreibe die Konstruktion eines Dreiecks ABC mit $b = 6$ cm, $c = 4$ cm und $h_c = 5$ cm und führe sie aus. Dabei gelten die üblichen Bezeichnungen für die Seiten und Höhen eines Dreiecks ABC. Mache Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen dieser Konstruktionsaufgabe.

b) Untersuche allgemein die Durchführbarkeit und Eindeutigkeit der Konstruktionsaufgabe aus Teil a) in Abhängigkeit von den Längen b, c und h_c.

Abgabetermin: **Montag, 08. Oktober 2012**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Di / Mi / Fr, 7. Stunde

1. Treffen: **Freitag, 24. August 2012, 13.00 Uhr, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2012

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufen 9 und 10

1. Aufgabe

In einem Garten stehen zwei runde Tische; an einem haben drei Personen Platz, an dem anderen vier. Ein Mann, zwei Frauen und vier Kinder wollen sich an die beiden Tische setzen.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die sieben Personen auf die beiden Tische zu verteilen. Dabei werden die einzelnen Personen nur nach Mann, Frau und Kind unter-schieden. Ihre Platzierung am Tisch soll nicht berücksichtigt werden.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die sieben Personen an den beiden Tischen zu platzieren. Dabei werden die Personen wieder nur nach Mann, Frau und Kind unterschieden. Zwei Platzierungen werden als gleich angesehen, wenn sie durch Weiterrücken oder durch Umkehrung der Reihenfolge auseinander hervorgehen.

2. Aufgabe

Es sei n eine natürliche Zahl.
Beweisen Sie: Wenn sich die Zahl $n + 1$ sowohl als Summe zweier aufeinander folgender Quadratzahlen als auch als Summe einer Quadratzahl und dem Doppelten der nachfolgenden Quadratzahl schreiben lässt, dann sind die Zahlen $2n + 1$ und $3n + 1$ Quadratzahlen.

3. Aufgabe

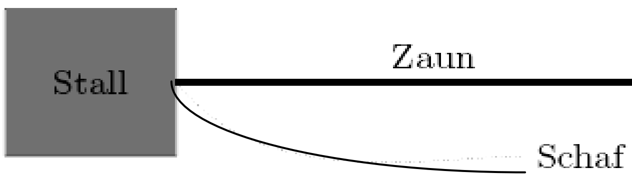
Wenn man aus der Zahl 987 654 321 einige Ziffern streicht und die Reihenfolge der restlichen Ziffern beibehält, erhält man eine neue Zahl mit weniger Ziffern.

a) Ermitteln Sie alle Quadratzahlen, die beim Streichen von sechs der neun Ziffern entstehen können.

b) Karl behauptet: „Wenn man die Ziffer 1 und genau drei weitere Ziffern streicht, so erhält man niemals eine Quadratzahl“.
Beweisen Sie diese Aussage oder widerlegen Sie diese Aussage mit einem Gegenbeispiel.

4. Aufgabe

Ein Schafstall besitzt einen quadratischen Grundriss mit 10 m Seitenlänge. Auf die Ostwand des Stalls stößt senkrecht und mittig ein Zaun, durch den das Umkreisen des Stalls unmöglich wird.
Ein Schaf grast südlich dieses Zauns. Es ist mit einem 25 m langen (dünnen) Strick genau an der Stelle angepflockt, an welcher der Zaun auf die Wand stößt – siehe Skizze.



Das Schaf frisst sämtliches Gras, das in der durch Strick, Zaun und Stall begrenzten Reichweite liegt.

a) Erstellen Sie eine Ergänzung der obigen Skizze mit der Fläche, die das Schaf abgrasen kann. (Eine Begründung der Korrektheit der Skizze wird nicht erwartet.)

b) Berechnen Sie den Inhalt der abgrasbaren Fläche.

Abgabetermin: **Montag, 08. Oktober 2012**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Di / Mi / Fr, 7. Stunde

1. Treffen: **Freitag, 24. August 2012, 13.00 Uhr, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2012

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Kurse 11 und 12

1. Aufgabe

In einem Garten stehen zwei runde Tische; an einem haben drei Personen Platz, an dem anderen vier. Ein Mann, zwei Frauen und vier Kinder wollen sich an die beiden Tische setzen.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die sieben Personen auf die beiden Tische zu verteilen. Dabei werden die einzelnen Personen nur nach Mann, Frau und Kind unter-schieden. Ihre Platzierung am Tisch soll nicht berücksichtigt werden.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die sieben Personen an den beiden Tischen zu platzieren. Dabei werden die Personen wieder nur nach Mann, Frau und Kind unterschieden.
Zwei Platzierungen werden als gleich angesehen, wenn sie durch Weiterrücken oder durch Umkehrung der Reihenfolge auseinander hervorgehen.

2. Aufgabe

Bestimmen Sie alle Tripel reeller Zahlen (a, b, c), die das Gleichungssystem

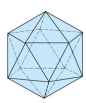
$$\begin{aligned} a \cdot b &= 20 \\ b \cdot c &= 12 \\ a + b + c &= 12 \end{aligned}$$

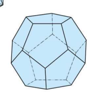
lösen.

3. Aufgabe

Es sei k ein Kreis mit dem Radius 1, dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung O eines kartesischen x-y-Koordinatensystems ist. Der Punkt P liege im ersten Quadranten dieses Koordinatensystems auf k. Die Tangente im Punkt P an den Kreis k schneide die x- und y-Achse in den Punkten S bzw. T. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{ST}$ sei M.
Wenn sich der Punkt P auf dem Teil des Kreises k bewegt, der im ersten Quadranten liegt, dann bewegt sich der Punkt M = M(x, y) auf einer Kurve. Ermitteln Sie eine Funktion f mit einer Gleichung $y = f(x)$, deren Graph diese Kurve ist.

4. Aufgabe





Amelie und Bruno spielen ein Würfelspiel. Dabei würfelt Amelie mit einem mit den Zahlen von 1 bis 20 beschrifteten Ikosaeder. Bruno dagegen würfelt mit einem mit den Zahlen von 1bis 12 beschrifteten Dodekaeder.
Beide würfeln abwechselnd jeweils viermal. Amelie gewinnt, wenn sie bei mindestens drei der vier aufeinander folgenden Würfe eine höhere Augenzahl erzielt als Bruno. Andernfalls gewinnt Bruno. Wer von beiden hat die größere Gewinnchance?
Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass Amelie bei einem Wurf ein höheres Ergebnis erzielt als Bruno.

Abgabetermin: Montag, 08. Oktober 2012

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Di / Mi / Fr, 7. Stunde

1. Treffen: **Freitag, 24. August 2012, 13.00 Uhr, Physiksaal 1**