Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2011

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 5

1. Aufgabe

a) Zeichne fünf Geraden, die genau vier Schnittpunkte haben.

b) Zeichne fünf Geraden, die genau fünf Schnittpunkte haben.

c) Wie viele Schnittpunkte können fünf verschiedene Geraden höchstens haben?
Zeichne fünf Geraden mit dieser Höchstzahl von Schnittpunkten.

Hinweis: Zwei parallele Geraden haben keinen Schnittpunkt; zwei nicht parallele Geraden schneiden sich immer in genau einem Punkt.

2. Aufgabe

Hier geht es um Kryptogramme, also Zahlenrätsel, bei denen die Buchstaben Ziffern bezeichnen – verschiedene Buchstaben bezeichnen verschiedene Ziffern, gleiche Buchstaben bezeichnen gleiche Ziffern. Ersetze für eine Lösung die Buchstaben so durch Ziffern, dass eine richtig gelöste Aufgabe entsteht.

a) Gib für das folgende Kryptogramm drei Lösungen an.

$$\begin{array}{ccccc} & E & I & N & S \\ + & E & I & N & S \\ \hline & Z & W & E & I \end{array}$$

b) Warum gibt es bei dem folgenden Kryptogramm keine Lösung?

$$\begin{array}{ccccc} & D & R & E & I \\ - & E & I & N & S \\ \hline & Z & W & E & I \end{array}$$

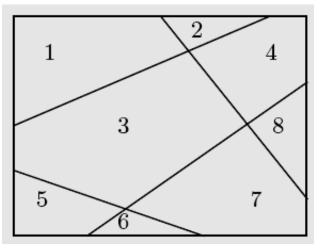
3. Aufgabe

Stephan schreibt sich auf ein Blatt Papier fortlaufend die Zahlen von 0 bis 200 auf.

a) Zunächst streicht er alle Zahlen weg, die mindestens eine Ziffer 3 enthalten.
Wie viele Zahlen bleiben übrig?

b) Dann streicht er von den verbliebenen Zahlen alle weg, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten.
Wie viele Zahlen sind jetzt noch übrig?

4. Aufgabe



Ein Rechteck ist 6 cm lang und 4 cm breit. Mit einem Lineal werden vier verschiedene gerade Linien gezogen, die jeweils von einer der vier Kanten zu einer anderen Kante verlaufen müssen. Längs dieser Linien wird das Rechteck zerschnitten. In der Zeichnung ist ein Beispiel dargestellt. Hier würden 8 Papierschnipsel entstehen.

Zeichne für die möglichen Anzahlen, bei denen weniger als 8 Papierschnipsel entstehen, jeweils ein Beispiel und nummeriere die Schnipsel. Wie viele Schnipsel entstehen mindestens? Die Form der Schnipsel spielt keine Rolle.

Abgabetermin: **Freitag, 23. September 2011**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Do / Fr, 7. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 19. August 2011, 13.00 Uhr, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2011

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 6

1. Aufgabe

Stephan schreibt sich auf ein Blatt Papier fortlaufend die Zahlen von 0 bis 200 auf.

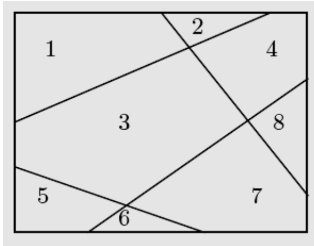
a) Zunächst streicht er alle Zahlen weg, die mindestens eine Ziffer 3 enthalten. Wie viele Zahlen bleiben übrig?

b) Dann streicht er von den verbliebenen Zahlen alle weg, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten. Wie viele Zahlen sind jetzt noch übrig?

c) Wenn er von den verbliebenen Zahlen jetzt auch noch alle Quadratzahlen streicht – bleiben dann mehr oder weniger als die Hälfte der ursprünglichen Zahlen übrig?

2. Aufgabe

Ein Rechteck ist 6 cm lang und 4 cm breit. Mit einem Lineal werden vier verschiedene gerade Linien gezogen, die jeweils von einer der vier Kanten zu einer anderen Kante verlaufen müssen. Längs dieser Linien wird das Rechteck zerschnitten. In der Zeichnung ist ein Beispiel dargestellt. Hier würden 8 Papierschnipsel entstehen.



Wie viele Papierschnipsel können dabei entstehen, wenn die Linien anders verlaufen? Gib alle verschiedenen Möglichkeiten der Anzahlen an, indem du jeweils ein Beispiel zeichnest und die Schnipsel nummerierst. Die Form der Schnipsel spielt keine Rolle.

3. Aufgabe

Die Sport-AG der Schule soll ein Tischtennis-Turnier organisieren. Die Sportler überlegen, wie sie den Sieger ermitteln wollen. Es haben sich 24 Kinder angemeldet. Es gibt mehrere Vorschläge:

a) Anton schlägt vor, dass jeder gegen jeden genau einmal spielen soll. Wie viele Spiele müssen dann gespielt werden?

b) Bea schlägt das KO-System vor. Es kommt immer nur der Gewinner weiter. Wenn erstmals eine ungerade Anzahl von Spielern übrig geblieben ist, beginnt die letzte Runde, in der dann jeder gegen jeden spielt. Wie viele Spiele finden bei diesem Vorschlag statt?

c) Clemens möchte vier Staffeln A,B,C und D zu je 6 Spielern bilden. In jeder Staffel spielt jeder gegen jeden genau einmal. Die besten zwei jeder Staffel kommen in die zweite Runde. Nun werden zwei Staffeln zu je vier Spielern gebildet. Innerhalb einer Staffel spielt wieder jeder gegen jeden, und die besten zwei kommen in die dritte Runde. In der dritten Runde spielt auch jeder gegen jeden, und der Sieger wird ermittelt. Wie viele Spiele finden bei dieser Variante statt?

4. Aufgabe

Eine Reisegruppe von 40 Touristen kam in Australien an. Dreißig von ihnen hatten Amerikanische Dollar und zwanzig von ihnen hatten Britische Pfund.

Ermittle die kleinstmögliche und die größtmögliche Anzahl von Touristen dieser Reisegruppe, die sowohl Amerikanische Dollar als auch Britische Pfund bei sich hatten.

→ Abgabetermin: **Freitag, 23. September 2011** ←

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Do / Fr, 7. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 19. August 2011, 13.00 Uhr, Physiksaal 1**

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 7

1. Aufgabe

Erik hatte vor sich ein randvolles Glas Bananensaft und eine Flasche Kirschsaft. Zuerst trank er vorsichtig ein Sechstel des Bananensaftes und füllte das Glas mit der gleichen Menge Kirschsaft auf. Anschließend trank er davon ein Drittel und füllte das Glas wieder bis zum Rand mit Kirschsaft auf. Nun trank er die Hälfte und füllte nochmals das Glas mit Kirschsaft bis zum Rand auf. Dann trank er das Glas leer.

Untersuche, ob Erik mehr, gleichviel oder weniger Bananen- als Kirschsaft getrunken hat.

2. Aufgabe

Eine Reisegruppe von 40 Touristen kam in Australien an. Dreißig von ihnen hatten Amerikanische Dollar und zwanzig von ihnen hatten Britische Pfund.

Ermittle die kleinstmögliche und die größtmögliche Anzahl von Touristen dieser Reisegruppe, die sowohl Amerikanische Dollar als auch Britische Pfund bei sich hatten.

3. Aufgabe

Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks soll 24 cm betragen. Eine der Seiten dieses Dreiecks soll 2,5-mal so lang sein wie eine der anderen Seiten.

Untersuche, ob es möglich ist, die Seitenlängen eines Dreiecks so anzugeben, dass diese Bedingungen erfüllt sind. Ist dies der Fall, dann gib alle Möglichkeiten an.
Achte auf die Konstruierbarkeit der Dreiecke !

4. Aufgabe

Die Feldspätzin Molly fand, dass es wieder einmal Zeit sei, ihre Freundin Nelly in der 6 km entfernten Stadt zu besuchen. Die gleiche Idee hatte auch Nelly. Just als es vom Kirchturm 16 Uhr schlug, flogen beide daheim los und pfeilgerade mit jeweils konstanter Geschwindigkeit einander entgegen. Dabei war die schlanke Städterin eineinhalbmal so schnell wie Molly. Nach genau zwei Minuten Flugzeit verschnaufte Nelly auf einem Baum und flog nicht weiter. Exakt vier Minuten später traf auch die mollige Feldspätzin dort ein.

Ermittle die Geschwindigkeiten, mit denen Molly und Nelly flogen.

Abgabetermin: **Freitag, 23. September 2011**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Do / Fr, 7. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 19. August 2011, 13.00 Uhr, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2011

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

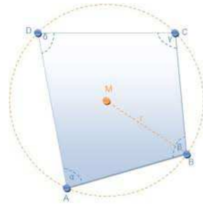
Aufgaben Klassenstufe 8

1. Aufgabe

Die Feldspätzin Molly fand, dass es wieder einmal Zeit sei, ihre Freundin Nelly in der 6 km entfernten Stadt zu besuchen. Die gleiche Idee hatte auch Nelly. Just als es vom Kirchturm 16 Uhr schlug, flogen beide daheim los und pfeilgerade mit jeweils konstanter Geschwindigkeit einander entgegen. Dabei war die schlanke Städterin eineinhalbmal so schnell wie Molly. Nach genau zwei Minuten Flugzeit verschnaufte Nelly auf einem Baum und flog nicht weiter. Exakt vier Minuten später traf auch die mollige Feldspätzin dort ein.

Ermittle die Geschwindigkeiten, mit denen Molly und Nelly flogen.

2. Aufgabe



Eine Strecke, deren Endpunkte auf einem Kreis liegen, bezeichnet man als Sehne dieses Kreises. Ein Viereck ABCD, dessen Eckpunkte in der Reihenfolge A, B, C, D auf einem Kreis liegen, heißt **Sehnenviereck**.

a) Die Punkte A, B, C und D mit den Koordinaten (6; 0), (10; 2), (10; 8) und (3; 1) sind Eckpunkte eines Sehnenvierecks. Trage diese Punkte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und konstruiere einen Kreis, auf dem alle vier Punkte liegen. Beschreibe, wie du den Kreismittelpunkt konstruiert hast, und gib seine Koordinaten an.

b) Zeichne drei verschieden große Kreise und in jeden dieser Kreise ein Sehnenviereck. Miss die Größen aller Innenwinkel der Vierecke und bilde jeweils von zwei gegenüberliegenden Innenwinkeln die Summe ihrer Maße. Welche Vermutung kann man aus diesen Beispielen ableiten?

c) Beweise deine Vermutung für den Fall, dass der Mittelpunkt des Umkreises im Inneren des Sehnenvierecks liegt.

3. Aufgabe

Eine **Palindromzahl** ist eine Zahl mit folgender Eigenschaft: Liest man ihre Ziffern von links nach rechts, so ergibt sich dieselbe Zahl, wie beim Lesen von rechts nach links. Die Zahl **615516** ist eine Palindromzahl.

a) Beweise: Eine sechsstellige Palindromzahl ist immer durch 11 teilbar.

b) Beweise: Wenn man alle sechsstelligen Palindromzahlen durch 11 dividiert, dann sind mindestens 10% dieser Quotienten fünfstellige Palindromzahlen.

4. Aufgabe

Martin reklamiert bei seinem Vorgesetzten Herrn Geizig: ”Mir wurde zu wenig Geld für meine Reisekosten überwiesen. Ich hatte Ihnen doch die exakte ganzzahlige Summe angegeben und jetzt fehlen genau **26 €**.“ Herr Geizig antwortet: ”Entschuldigen Sie, da muss mir wohl ein Zahlendreher unterlaufen sein. Ich habe bestimmt im Betrag einfach zwei Ziffern vertauscht.“

Begründe, dass diese Erklärung nicht stimmen kann.

.

Abgabetermin: **Freitag, 23. September 2011**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Do / Fr, 7. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 19. August 2011, 13.00 Uhr, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2011

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

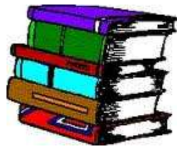
Aufgaben Klassenstufen 9 und 10

1. Aufgabe

Martin reklamiert bei seinem Vorgesetzten Herrn Geizig: ”Mir wurde zu wenig Geld für meine Reisekosten überwiesen. Ich hatte Ihnen doch die exakte ganzzahlige Summe angegeben und jetzt fehlen genau **26 €**.“ Herr Geizig antwortet: ”Entschuldigen Sie, da muss mir wohl ein Zahlendreher unterlaufen sein. Ich habe bestimmt im Betrag einfach zwei Ziffern vertauscht.“

Begründe, dass diese Erklärung nicht stimmen kann.

2. Aufgabe



Die Seiten zweier unterschiedlich dicker Bücher werden fortlaufend durchnummeriert – jeweils beginnend mit der Seite 1 auf der Vorderseite des ersten Blattes.

a) Zum Nummerieren der Seiten des ersten Buches benötigt man 6941 Ziffern. Ermittle die Nummer der letzten Seite.

b) Wir betrachten im Folgenden die Seitennummern und nicht mehr die Anzahl der verwendeten Ziffern. Aus dem zweiten Buch hat jemand ein Blatt herausgerissen, dadurch fehlen die beiden Nummern auf Vorder- und Rückseite dieses Blattes. Die Summe aller noch verbliebenen Seitennummern im zweiten Buch beträgt **81707**.

Ermittle die beiden fehlenden Seitennummern.

3. Aufgabe

Es sollen Sitzanordnungen für sieben Paare (jeweils ein Mann und eine Frau) untersucht werden. Eines dieser Paare ist das Hochzeitspaar, die anderen sind bei der Hochzeitsfeier zu Gast. Es stehen zwei runde Tische zur Verfügung: ein Tisch für vier Paare und einer für drei Paare. Das Hochzeitspaar soll am großen Tisch sitzen. Die Paare setzen sich stets so an den Tisch, dass jede Frau rechts neben ihrem Mann sitzt.

Wie viele verschiedene **Sitzordnungen** gibt es?

Hinweis: Zwei Sitzordnungen an einem Tisch sollen gleich sein, wenn man die eine aus der anderen dadurch erreichen kann, dass alle am Tisch Sitzenden um einen Stuhl oder um die jeweils gleiche Anzahl von Stühlen in die gleiche Richtung rutschen (den Platz der vorher dort Sitzenden einnehmen).

4. Aufgabe

Ermittle alle Paare **(n; p)** mit einer positiven ganzen Zahl n und einer Primzahl p, die die Gleichung

$$n^2 - 8\cdot n + 6 = p - 1$$

erfüllen.

Abgabetermin: **Freitag, 23. September 2011**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Do / Fr, 7. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 19. August 2011, 13.00 Uhr, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2011

<u>Bitte beachte</u>: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Kurse 11 und 12

1. Aufgabe

Martin reklamiert bei seinem Vorgesetzten Herrn Geizig: "Mir wurde zu wenig Geld für meine Reisekosten überwiesen. Ich hatte Ihnen doch die exakte ganzzahlige Summe angegeben und jetzt fehlen genau **26 €**." Herr Geizig antwortet: "Entschuldigen Sie, da muss mir wohl ein Zahlendreher unterlaufen sein. Ich habe bestimmt im Betrag einfach zwei Ziffern vertauscht."

Begründe, dass diese Erklärung nicht stimmen kann.

2. Aufgabe

Ermittle alle Paare **(n; p)** mit einer positiven ganzen Zahl n und einer Primzahl p, die die Gleichung

$$n^2 - 8\cdot n + 6 = p - 1$$

erfüllen.

3. Aufgabe

Es sollen Sitzanordnungen für sieben Paare (jeweils ein Mann und eine Frau) untersucht werden. Eines dieser Paare ist das Hochzeitspaar, die anderen sind bei der Hochzeitsfeier zu Gast. Es stehen zwei runde Tische zur Verfügung: ein Tisch für vier Paare und einer für drei Paare. Das Hochzeitspaar soll am großen Tisch sitzen. Die Paare setzen sich stets so an den Tisch, dass jede Frau rechts neben ihrem Mann sitzt.

a) Wie viele verschiedene **Sitzordnungen** gibt es?

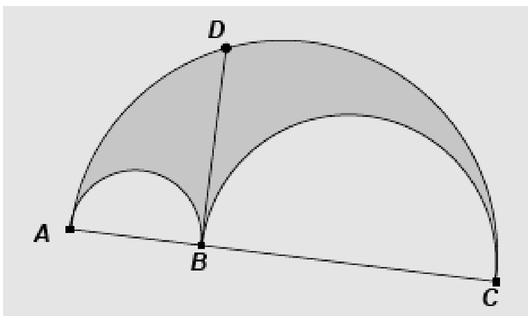
<u>Hinweis</u>: Zwei Sitzordnungen an einem Tisch sollen gleich sein, wenn man die eine aus der anderen dadurch erreichen kann, dass alle am Tisch Sitzenden um einen Stuhl oder um die jeweils gleiche Anzahl von Stühlen in die gleiche Richtung rutschen (den Platz der vorher dort Sitzenden einnehmen).

b) Zu später Stunde werden alle Regeln bezüglich der Sitzordnung fallen gelassen; jeder setzt sich da hin, wo er möchte. Wie viele Sitzordnungen sind jetzt denkbar?

4. Aufgabe

Gegeben sei ein Halbkreis über der Strecke $\overline{AC}$. Auf der Strecke $\overline{AC}$ liege der Punkt B. Die Senkrechte zu $\overline{AC}$ durch B schneide den Halbkreis über der Strecke $\overline{AC}$ im Punkt D. Über den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ seien Halbkreise gezeichnet, wie in der Abbildung gezeigt.

<u>Beweise</u>, dass der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{BD}$ und die grau markierte Fläche denselben Flächeninhalt haben.



Abgabetermin: **<u>Freitag, 23. September 2011</u>**

<u>Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG</u>

Do / Fr, 7. Stunde in den Physiksälen

<u>1. Treffen</u>: **Freitag, 19. August 2011, 13.00 Uhr, Physiksaal 1**