50. Mathematikolympiade, 3. Stufe, Klasse 3

26.02.2011

Vorname / Name..

Geb.datum : ....

PLZ/ Wohnort..

Straße :..

Schule mit Schulort:. ....

Hinweise : Schreibe auf jedes Lösungsblatt **deinen Namen**, **deine Klassenstufe** und **deine Schule**!

Schreibe die **Lösungen** zu jeder Aufgabe **auf gesonderte Blätter**!

Denke daran, die einzelnen Lösungsschritte anzugeben, zu begründen und sprachlich richtig darzustellen.

1. Aufgabe

Hannes hat in seinem Geldbeutel 1,11 Euro. Er weiß, dass es genau 11 Münzen sind. Allerdings sind darunter keine Zwei-Cent-, Zwanzig-Cent- und keine Euro-Münzen. Von den anderen Münzen ist mindestens eine Münze je Sorte dabei.

a) Welche Sorten Münzen hat Hannes in seinem Geldbeutel?

b) Wie viele Geldstücke von jeder Sorte hat Hannes?

c) Warum kann er nicht zwei 50-Cent-Münzen haben?

2. Aufgabe

Toni und Willi würfeln mit einem blauen und einem roten Würfel. Toni erklärt die Spielregel:

"Wir würfeln mit beiden Würfeln, du bekommst einen Punkt, wenn die Summe der Augenzahlen 2, 3, 4, 10, 11 oder 12 ergibt. Ich bekomme bei den Augensummen 5, 6, 7, 8 und 9 einen Punkt.“

a) Notiere alle Möglichkeiten, wie Willi die Summe 10 würfeln kann.

b) Für welche Augensummen gibt es nur eine Möglichkeit?

c) Bei welcher Augensumme gibt es genau sechs Möglichkeiten?

d) Wer von den beiden hat bei dieser Regel größere Gewinnchancen? Begründe deine Antwort.

50. Mathematikolympiade, 3. Stufe, Klasse 4

26.02.2011

Vorname / Name..

Geb.datum : ....

PLZ/ Wohnort..

Straße :..

Schule mit Schulort:.   ....

Hinweise : Schreibe auf jedes Lösungsblatt **deinen Namen**, **deine Klassenstufe** und **deine Schule**!

Schreibe die **Lösungen** zu jeder Aufgabe **auf gesonderte Blätter**!

Denke daran, die einzelnen Lösungsschritte anzugeben, zu begründen und sprachlich richtig darzustellen.

1. Aufgabe

An der Tafel sind die Ziffernkarten von 1 bis 9 in folgender Reihenfolge angebracht:

1	5	9	2	7	3	6	8	4

Die Schüler sollen nun die Ziffernkarten der Größe nach von 1 bis 9 ordnen.
Sie dürfen allerdings immer nur zwei benachbarte Zahlen zusammen bewegen.

Beispiel: 1 5 9 2 7 3 6 $\boxed{8\ 4}$ $\rightarrow$ 1 $\boxed{8\ 4}$ 5 9 2 7 3 6

a) Finde eine Lösung. Schreibe deine Schritte wie im Beispiel auf. Kennzeichne bei jedem Schritt die verschobenen Zahlen.

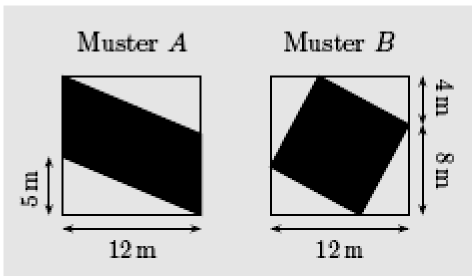
b) Was ist die geringste Anzahl an Schritten? Schreibe deine Lösung wie bei a) auf.

2. Aufgabe

Herr Krause möchte in unserem Klassenraum den quadratischen Fußboden verschönern. Er kann sich nicht zwischen zwei Mustern entscheiden.

Die schwarze Fläche möchte er möglichst groß haben.

Für welches Muster wird sich Hausmeister Krause entscheiden?
Begründe deine Antwort.



50. Mathematikolympiade, 3. Stufe, Klasse 5

26.02.2011

Vorname / Name / Geb.datum : ....

PLZ/ Wohnort / Straße :...

Tel. - Nr...**Schule mit Schulort:**. ....

Hinweise : Schreibe auf jedes Lösungsblatt **deinen Namen**, **deine Klassenstufe** und **deine Schule**! Schreibe die **Lösungen** zu jeder Aufgabe **auf gesonderte Blätter**! Denke daran, die einzelnen Lösungsschritte anzugeben, zu begründen und sprachlich richtig darzustellen.

1. Aufgabe

Drei Frauen unterhalten sich über ihre Kinder und Neffen und deren Alter.

a) Frau H. sagt: "Meine drei Neffen sind zusammen 50 Jahre alt, Trock ist drei Jahre jünger als Trick, und Trick ist fünf Jahre jünger als Track.“
Wie alt sind die drei Neffen jeweils?

b) Frau L. sagt: "Alle meine drei Kinder sind älter als ein Jahr; das Produkt ihrer drei Alterszahlen ist 50.“
Wie alt sind die Kinder von Frau L. jeweils?

c) Frau S. schließlich sagt: "Die Summe der Alterszahlen meiner drei Neffen ist auch 50, und alle Alterswerte sind Primzahlen, und zwischen dem Ältesten und dem Jüngsten liegen weniger als dreißig Jahre.“

Können Frau H. und Frau L. aus diesen Angaben das Alter der Neffen von Frau S. eindeutig bestimmen? Begründe deine Antwort.

Hinweis: Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Die kleinste Primzahl ist 2.

2. Aufgabe

Bei den sprechenden und neugierigen Eichhörnchen:

Zwei solcher Eichhörnchen haben eine Tüte Studentenfutter gefunden und untersuchen das Gewicht der verschiedenen Nussarten in der Tüte.
Ein drittes Eichhörnchen kommt herbei und möchte wissen, was sie herausgefunden haben. Die beiden sagen:

(1) Eine Walnuss und eine Erdnuss wiegen zusammen so viel wie eine Paranuss.

(2) Eine Walnuss wiegt so viel wie eine Erdnuss und eine Haselnuss zusammen.

(3) Zwei Paranüsse wiegen so viel wie drei Haselnüsse.

Sag an, du drittes Eichhorn: Wie viele Erdnüsse wiegen genauso viel wie eine Walnuss?

Beantworte diese Frage an das dritte Eichhörnchen.

50. Mathematikolympiade, 3. Stufe, Klasse 6

26.02.2011

Vorname / Name / Geb.datum : ....

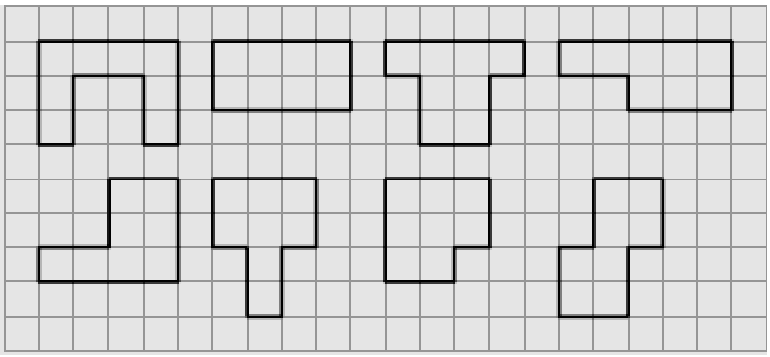
PLZ/ Wohnort / Straße :...

Tel. - Nr....**Schule mit Schulort:**. ....

Hinweise : Schreibe auf jedes Lösungsblatt **deinen Namen**, **deine Klassenstufe** und **deine Schule**! Schreibe die **Lösungen** zu jeder Aufgabe **auf gesonderte Blätter**! Denke daran, die einzelnen Lösungsschritte anzugeben, zu begründen und sprachlich richtig darzustellen.

1. Aufgabe

In einem Puzzle gibt es acht verschiedene, rechtwinklige, flächengleiche Formen, die jeweils 8 Kästchen umfassen. Von jeder Form sind ausreichend Teile vorhanden, die auch gedreht und umgeklappt verwendet werden dürfen.



a) Ein Quadrat (8 x 8 Kästchen) soll mit Teilen einer einzigen Form vollständig ausgelegt werden.
Zeichne zwei verschiedene Möglichkeiten mit unterschiedlichen Formen.

b) Nun soll ein Quadrat (8 x 8 Kästchen) mit Teilen zweier verschiedener Formen ausgelegt werden; sie müssen nicht in der gleichen Anzahl vorkommen.
Zeichne vier Möglichkeiten, die sich untereinander jeweils in mindestens einer der verwendeten Formen unterscheiden.

c) Schließlich soll ein Quadrat (8 x 8 Kästchen) mit Teilen aus vier verschiedenen Formen ausgelegt werden; sie müssen nicht in der gleichen Anzahl vorkommen.
Zeichne zwei Möglichkeiten, die nicht in allen vier verwendeten Formen übereinstimmen.

2. Aufgabe

Lukas und Dennis blättern im Telefonbuch und suchen Nummern mit Primzahlen heraus, weil die gerade in der Schule behandelt werden. Beide denken sich dazu ein Rätsel aus, das der andere lösen soll.

a) Das Rätsel von Lukas heißt: "Vier Ziffern der sechsstelligen Telefonnummer sind Primzahlen; es kommt keine Ziffer doppelt vor, und die Quersumme aller Ziffern ist 30. Die Summe der ersten drei Ziffern ist gleich der Summe der letzten drei Ziffern.“
Dennis beginnt zu rechnen und stellt fest, dass die Beschreibung nicht ausreicht; es gibt mehrere Telefonnummern, die diese Bedingungen erfüllen.
Wie viele Telefonnummern mit diesen Eigenschaften gibt es?

b) Dennis lässt auch eine sechsstellige Telefonnummer suchen und sagt: "Alle Ziffern sind Primzahlen, und außerdem stehen drei verschiedene zweistellige Primzahlen hintereinander.“
Auch Lukas beschwert sich, dass es mehrere Möglichkeiten für die Telefonnummer gibt.
Wie viele Telefonnummern kann Lukas finden?

50. Mathematikolympiade, 3. Stufe, Klasse 7

26.02.2011

Vorname / Name / Geb.datum : ....

PLZ/ Wohnort / Straße :...

Tel. - Nr....**Schule mit Schulort:**. ....

Hinweise : Schreibe auf jedes Lösungsblatt **deinen Namen**, **deine Klassenstufe** und **deine Schule**!
Schreibe die **Lösungen** zu jeder Aufgabe **auf gesonderte Blätter**!
Denke daran, die einzelnen Lösungsschritte anzugeben, zu begründen und sprachlich richtig darzustellen.

1. Aufgabe

Ritter Eisenfaust möchte sein Gold seinen drei Töchtern Adelheid, Brunhilde und Cecilie übergeben.

Er hat 21 Kisten: sieben voll mit jeweils 10 kg Gold, sieben halbvoll gefüllt mit Gold und sieben leere.

Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, die Kisten so unter den genannten Töchtern aufzuteilen, dass jede Tochter sieben Kisten und dieselbe Menge an Gold erhält.

2. Aufgabe

Ermittle die Summe der Quersummen aller Zahlen von 1 bis 1000.

50. Mathematikolympiade, 3. Stufe, Klasse 8

26.02.2011

Vorname / Name / Geb.datum : ....

PLZ/ Wohnort / Straße :..

Tel. - Nr....**Schule mit Schulort:**. ....

Im Falle meiner Qualifikation bin ich bereit, in der Zeit vom 8. bis 11. Mai 2011 an der Endrunde der deutschen Mathematikolympiade in Trier teilzunehmen.

....
(Unterschrift)

Hinweise : Schreibe auf jedes Lösungsblatt **deinen Namen**, **deine Klassenstufe** und **deine Schule**! Schreibe die **Lösungen** zu jeder Aufgabe **auf gesonderte Blätter**.

Die einzelnen Lösungsschritte sind zu begründen und sprachlich richtig darzustellen.

1. Aufgabe

Andreas, Björn, Chris und Daniel spielen Fußball. Plötzlich trifft einer der vier Jungen mit einem scharfen Schuss eine Fensterscheibe im Nachbarhaus. Sie zerbricht klirrend in tausend Stücke. Das Spiel ist jäh zu Ende und die vier werden zur Verantwortung gezogen. Man stellt ihnen mehrere Fragen und sie antworten wie folgt:

Andreas	(1)	Mein Schuss hat nichts mit der zerbrochenen Fensterscheibe zu tun.
	(2)	Daniel hat das Spiel angestoßen.
	(3)	Chris hat die Scheibe nicht eingeschlagen; er ist unschuldig.
Björn	(4)	Ich habe den Ball nicht ins Fenster geschossen.
	(5)	Chris ist der Übeltäter.
	(6)	Ich habe mehr Tore geschossen als Daniel.
Chris	(7)	Der Schuss in die Scheibe wurde nicht von mir abgegeben.
	(8)	Dieses Mal ist es mir nicht gelungen, ein Tor zu schießen.
	(9)	Andreas hat keine Schuld an der kaputten Scheibe.
Daniel	(10)	Ich habe den Ball nicht in die Fensterscheibe geschossen.
	(11)	Chris ist es gewesen.
	(12)	Als ich ankam, war das Spiel bereits in vollem Gange.

Offensichtlich haben es die Jungen mit der Wahrheit nicht immer genau genommen. Jeder der vier Jungen hat genau zweimal die Wahrheit und einmal die Unwahrheit gesagt. Untersuche, ob aus diesen eindeutig ermittelt werden kann, welche Aussagen wahr bzw. falsch sind und wessen Schuss in die Fensterscheibe ging.

Fortsetzung auf der nächsten Seite!

2. Aufgabe

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen die Punkte D und E so, dass D zwischen A und E liegt. Außerdem wird vorausgesetzt:

(1) Die Größe des Winkels BDC ist kleiner als 60° und gleich $2 \cdot \alpha$, wobei α die Größe des Winkels BAC bezeichnet.

(2) Subtrahiert man $3 \cdot \alpha$ von 180°, erhält man die Größe des Winkels CEA.

(3) Die Winkel ACB und BEC sind gleich groß.

a) Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Größe β des Innenwinkels CBA in Abhängigkeit von α und gib an, für welche Werte von α diese Beziehung gilt.

b) Untersuche, ob das Dreieck ABC gleichseitig sein kann.

c) Bestimme die Größe α unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

d) Bestimme die Größe α unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

3. Aufgabe

Tom notierte für jeden Tag in den Monaten Dezember und Januar die Mittagstemperatur. Nach Auswertung aller Messdaten stellt er die folgende Merkwürdigkeit fest: Mit Ausnahme des ersten und letzten Messwertes im Beobachtungszeitraum war die Mittagtemperatur jeweils gleich der Summe der Mittagtemperaturen am Vortag und am darauffolgenden Tag. Am 3. Dezember betrug die Mittagtemperatur 5 °C und am 31. Januar 2 °C.

Ermittle, welche Mittagstemperaturen Tom am 25. Dezember gemessen hat.

50. Mathematikolympiade, 3. Stufe, Klasse 9

26.02.2011

Vorname / Name / Geb.datum : ....

PLZ/ Wohnort / Straße :..

Tel. - Nr....**Schule mit Schulort:**. ....

Im Falle meiner Qualifikation bin ich bereit, in der Zeit vom 8. bis 11. Mai 2011 an der Endrunde der deutschen Mathematikolympiade in Trier teilzunehmen.

....

(Unterschrift)

Hinweise : Schreibe auf jedes Lösungsblatt **deinen Namen**, **deine Klassenstufe** und **deine Schule**!
Schreibe die **Lösungen** zu jeder Aufgabe **auf gesonderte Blätter**!
Denke daran, die einzelnen Lösungsschritte anzugeben, zu begründen und sprachlich richtig darzustellen.

1. Aufgabe

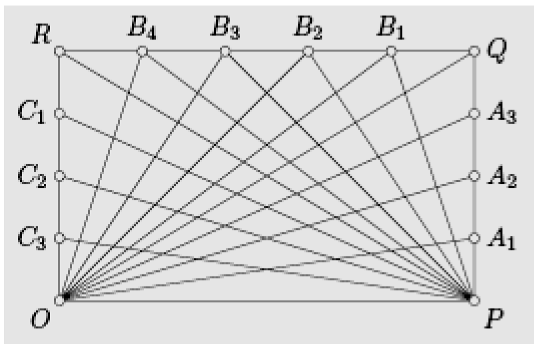
Meiers haben mehrere Kinder, die alle unterschiedlich alt sind, und es sei nicht ausgeschlossen, dass unter den Kindern Erwachsene sind. Jede Tochter ist um genau ein Jahr älter als einer ihrer Brüder. Bis auf einen ist jeder Sohn genau doppelt so alt wie eine seiner Schwestern. Alle Kinder zusammen sind 16 mal so alt wie das jüngste Kind.

Wie viele Kinder sind es und wie alt sind sie?

Hinweis: Es wird nur das ganzzahlige Alter der Kinder betrachtet.

2. Aufgabe

Gegeben sei ein Rechteck OPQR. Dessen Seiten $\overline{PQ}$ und $\overline{RO}$ seien jeweils durch n Punkte in n+1 gleich lange Strecken und die Seite $\overline{QR}$ durch m Punkte in m+1 gleich lange Strecken geteilt. Die Teilpunkte auf $\overline{PQ}$ seien von P beginnend mit $A_1,....,A_n$ bezeichnet, die auf $\overline{QR}$ von Q beginnend mit $B_1,....,B_m$ und die auf $\overline{RO}$ von R beginnend mit $C_1,....,C_n$. Nun werden von O und P aus zu sämtlichen Teilpunkten und zu den Eckpunkten Q und R Verbindungsstrecken gezeichnet.



Wie viele voneinander verschiedene Schnittpunkte dieser Verbindungsstrecken gibt es im Innern des Rechtecks?
Die oben stehende Abbildung veranschaulicht die Aufgabenstellung für m = 4 und n = 3.

3. Aufgabe

Man bestimme alle Paare (p ; q) von Primzahlen, für die auch $p^2 - 3 \cdot q - 1$ eine Primzahl ist.

50. Mathematikolympiade, 3. Stufe, Klasse 10

26.02.2011

Vorname / Name / Geb.datum : ....

PLZ/ Wohnort / Straße :..

Tel. - Nr...**Schule mit Schulort:**. ....

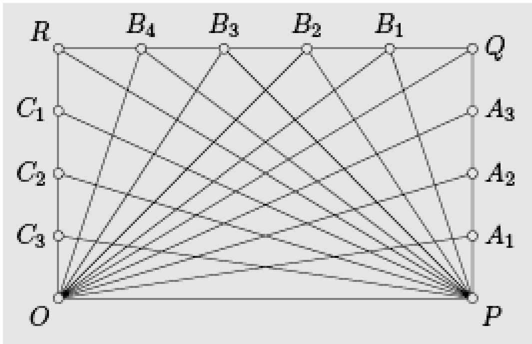
Im Falle meiner Qualifikation bin ich bereit, in der Zeit vom 8. bis 11. Mai 2011 an der Endrunde der deutschen Mathematikolympiade in Trier teilzunehmen.

....
(Unterschrift)

Hinweise : Schreibe auf jedes Lösungsblatt **deinen Namen**, **deine Klassenstufe** und **deine Schule**!
Schreibe die **Lösungen** zu jeder Aufgabe **auf gesonderte Blätter**!
Denke daran, die einzelnen Lösungsschritte anzugeben, zu begründen und sprachlich richtig darzustellen.

1. Aufgabe

Gegeben sei ein Rechteck OPQR. Dessen Seiten $\overline{PQ}$ und $\overline{RO}$ seien jeweils durch n Punkte in n+1 gleich lange Strecken und die Seite $\overline{QR}$ durch m Punkte in m+1 gleich lange Strecken geteilt. Die Teilpunkte auf $\overline{PQ}$ seien von P beginnend mit $A_1,\ldots,A_n$ bezeichnet, die auf $\overline{QR}$ von Q beginnend mit $B_1,\ldots,B_m$ und die auf $\overline{RO}$ von R beginnend mit $C_1,\ldots,C_n$. Nun werden von O und P aus zu sämtlichen Teilpunkten und zu den Eckpunkten Q und R Verbindungsstrecken gezeichnet.



Wie viele voneinander verschiedene Schnittpunkte dieser Verbindungsstrecken gibt es im Innern des Rechtecks?
Die oben stehende Abbildung veranschaulicht die Aufgabenstellung für m = 4 und n = 3.

2. Aufgabe

Man bestimme alle Paare (p ; q) von Primzahlen, für die auch $p^2 - 3 \cdot q - 1$ eine Primzahl ist.

3. Aufgabe

Stargate-MO-50 ist eine Science-Fiction-Serie, die sich mit den Abenteuern eines Top Secret Air Force Teams beschäftigt, das weite Strecken im Weltraum mit Hilfe von Toren (Ausgangspunkt oder Endpunkt einer Reise), die Stargates genannt werden, schnell überwinden kann. In Stargate-MO-50 gibt es genau 2011 Stargates und zwischen je zweien von ihnen gibt es genau eine Direktverbindung, ein so genanntes Wurmloch (Schnellstraße im Weltall). Leider dürfen die Wurmlöcher wie Einbahnstraßen nur in einer Richtung benutzt werden. Weiterhin ist bekannt, dass die Anzahl der von einem Stargate wegführenden Wurmlöcher für alle Stargates gleich ist.
Beweisen Sie, dass man von jedem Stargate aus jedes andere - eventuell auf einem Umweg über andere Stargates - durch Wurmlöcher erreichen kann.

50. Mathematikolympiade, 3. Stufe, Klassen 11-12

26.02.2011

Vorname / Name / Geb.datum : ....

PLZ/ Wohnort / Straße :...

Tel. - Nr...**Schule mit Schulort:**. ....

Im Falle meiner Qualifikation bin ich bereit, in der Zeit vom 8. bis 11. Mai 2011 an der Endrunde der deutschen Mathematikolympiade in Trier teilzunehmen.

....

(Unterschrift)

Hinweise : Schreibe auf jedes Lösungsblatt **deinen Namen**, **deine Klassenstufe** und **deine Schule**!
Schreibe die **Lösungen** zu jeder Aufgabe **auf gesonderte Blätter**!
Denke daran, die einzelnen Lösungsschritte anzugeben, zu begründen und sprachlich richtig darzustellen.

1. Aufgabe

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und ein Punkt T auf $\overline{AB}$, der von den Punkten A und B verschieden ist. Zwei Punkte P und Q liegen so auf der gleichen Seite der Geraden AB, dass die Dreiecke ATP und TBQ gleichseitig sind. Die Mittelpunkte der Strecken $\overline{PB}$ und $\overline{AQ}$ seien mit M bzw. N bezeichnet. Man beweise, dass das Dreieck TMN gleichseitig ist.

2. Aufgabe

Man bestimme alle Paare (p ; q) von Primzahlen, für die auch $p^2 - 3 \cdot q - 1$ eine Primzahl ist.

3. Aufgabe

Man bestimme alle Paare (a ; b) positiver ganzer Zahlen, die die Gleichung

$$a^b + b^a + 1 = 3 \cdot a \cdot b$$

erfüllen.