Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2010

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 5

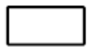
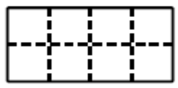
1. Aufgabe

Hier findest du 5 Zahlenfolgen. Sie fangen immer mit den Zahlen 2 und 3 an, gehen dann aber unterschiedlich weiter: Sie sind jeweils nach einer anderen Vorschrift aufgebaut.
Setze jede Zahlenfolge um drei Zahlen fort und gib jeweils ihre Vorschrift an.

a) 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, ……………
b) 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6, 4, 5, 6, ……………
c) 2, 3, 6, 7, 14, 15, 30, 31, 62, ……………
d) 2, 3, 4, 3, 5, 7, 5, 8, 11, 8, 12, 16, ……………
e) 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ……………

2. Aufgabe

In der Turnhalle der Linden-Schule stehen mehrere gleich lange Bänke. Zwei Gruppen haben gerade gemeinsam Sport. Es setzen sich immer sechs Kinder auf eine Bank, aber die letzte Bank wird nicht voll; da sitzen nur drei Kinder. Wenn sich nur fünf Kinder auf eine Bank setzen würden, dann würden nicht alle Kinder sitzen können, vier von ihnen müssten stehen.

a) Wie viele Kinder sind in der Turnhalle und wie viele Bänke stehen dort?
b) Am Ende der Stunde soll Nick aufräumen. Er soll vier Zweierhocker der Form  auf die nebenstehende Fläche stellen. 

Zeichne alle Möglichkeiten auf, wie er die vier Hocker auf die Fläche stellen kann.

3. Aufgabe

Jens kommt kurz vor seinem Geburtstag zu seinem Opa.
Opa holt einen großen Sack mit vielen Münzen und sagt:
"In diesem Sack sind viele Münzen mit allen Werten, die es gibt, also 1 Cent, 2 Cent, 5 Cent, 10 Cent, 20 Cent, 50 Cent, 1 Euro und 2 Euro. Du darfst dir davon 20 Münzen aussuchen, aber du musst aus diesen 20 Münzen zwei Geldbeträge gleichzeitig auf den Tisch legen können: Ein Geldbetrag soll 5,34 € sein, der andere 4,66 €. Diese zehn Euro sind dir also sicher. Ach ja, jeder Münzwert soll auf dem Tisch mindestens einmal vorkommen.
So, wie viel Geld schenke ich dir maximal?" – Beantworte diese Frage für Jens.

4. Aufgabe

In der nebenstehenden verschlüsselten Aufgabe, einem sogenannten Kryptogramm, sind gleiche Ziffern durch gleiche Buchstaben und verschiedene Ziffern durch verschiedene Buchstaben ersetzt.
Der erste Buchstabe jeder Zahl darf keine 0 sein.
Finde eine Lösung des Kryptogramms.

$$\begin{array}{cccc} & A & B & B \\ + & B & B & A \\ \hline C & A & B & C \end{array}$$

Abgabetermin: Freitag, 01. Oktober 2010

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Do / Fr, 7. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 20. August 2010, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2010

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 6

1. Aufgabe

In der nebenstehenden verschlüsselten Aufgabe, einem sogenannten Kryptogramm, sind gleiche Ziffern durch gleiche Buchstaben und verschiedene Ziffern durch verschiedene Buchstaben ersetzt.
Der erste Buchstabe jeder Zahl darf keine 0 sein.
Finde eine Lösung des Kryptogramms.

$$\begin{array}{cccc} & A & B & B \\ + & B & B & A \\ \hline C & A & B & C \end{array}$$

2. Aufgabe

Jede natürliche Zahl hat eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren (PFZ). Zum Beispiel ist $36 = 2^2 \cdot 3^2$ oder $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Wir nennen in dieser Aufgabe die Anzahl der Primfaktoren einer Zahl ihre **Primlänge**. Die Zahlen 36 und 330 haben also beide die Primlänge 4.

a) Welche Primlänge können zweistellige Zahlen höchstens haben ?

b) Gib alle zweistelligen Zahlen an, die diese größtmögliche Primlänge aufweisen.

c) Gib alle zweistelligen Zahlen mit der Primlänge 5 an.

3. Aufgabe

Die drei Freunde Michi, Niki und Omar aus Hamburg kommen zum Abschluss ihrer Schulzeit auf eine ausgefallene Idee. Sie wollen einen Ausflug zur 150 km entfernten Floßburg machen. Das Ausgefallene an ihrem Plan ist, dass sie nur einen Motorroller für zwei Personen zur Verfügung haben. Natürlich können sie auch zu Fuß gehen; ein Fußgänger schafft 5 km in der Stunde. Sie sprechen mehrere Möglichkeiten durch, um ihr Vorhaben umzusetzen.

a) Niki erklärt sich bereit, zur selben Zeit, in der seine beiden Freunde mit dem Roller zur Floßburg starten, in Hamburg loszulaufen. Er will vier Stunden gehen und dann warten, bis ihn einer seiner Freunde abholt. Er möchte aber auch, dass der Roller solange mit 70 km/h gefahren wird, bis er abgeholt wird; danach soll der Roller mit 65 km/h fahren.
- Wie lange wäre dann die Wartezeit für Niki, und wie lange dauert es, bis alle an der Floßburg sind ?

b) Michi sagt: "Der Roller kann auch 75 km/h fahren. Ich laufe in Hamburg los, ihr fahrt zur Floßburg, dann soll einer sofort umdrehen und mich unterwegs aufnehmen.“
- Wie weit muss Michi nach seiner Idee laufen ?
- Wie lange dauert es, bis alle drei Freunde auf diese Weise zur Floßburg kommen ?

4. Aufgabe

Während eines Ferienlagers gibt jeder Teilnehmer jedem anderen genau ein Foto von sich. Insgesamt werden 2450 Fotos verteilt. Bestimme die Anzahl der Teilnehmer.

Abgabetermin: **Freitag, 01. Oktober 2010**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Do / Fr, 7. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 20. August 2010, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2010

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 7

1. Aufgabe

50

Tim und Stefanie unterhalten sich und stellen fest, dass die Mathematik-Olympiade dieses Jahr ihren 50. Geburtstag feiert. Darauf meint Stefanie, dass sie ein gutes Rätsel kenne. Tim will es sofort hören. Also sagt Stefanie: "Denke dir eine Zahl und addiere zu ihr 17, multipliziere das Ergebnis mit 3 und subtrahiere deine Zahl. Anschließend subtrahiere 1. Danach dividiere das Ergebnis durch 2 und subtrahiere erneut die von dir gedachte Zahl, abschließend multipliziere mit 2. – Wetten, du erhältst 50 ?“ Obwohl Tim das vorausgesagte Ergebnis erhält, will er nicht glauben, dass jede beliebige Zahl die Geburtstagszahl der Mathematik-Olympiade liefert.

a) Zeige an einer selbstgewählten Zahl, dass Stefanie mit ihrer Rechnung Recht hat.

b) Untersuche, ob man bei jeder gedachten Zahl tatsächlich das von Stefanie vorausgesagte Ergebnis erhält.

2. Aufgabe

Auf einem Tisch stehen 4 geschlossene Kästchen. Eines davon enthält Goldklumpen, eines Sand, eines Kieselsteine und eines Holzkugeln. Drei dieser Kästchen sind beschriftet. Auf einem steht "Gold oder Sand“, auf einem anderen "Kieselsteine oder Holz“ und auf dem dritten "Gold oder Holz“. Anna darf sich eines dieser Kästchen auswählen und möchte natürlich das mit dem Gold bekommen. Sie erfährt, dass alle Aufschriften der Wahrheit entsprechen. Anna darf zwar keines der Kästchen anfassen, aber bevor sie eines auswählt, darf sie sich eines öffnen lassen und hinein schauen. – Untersuche, ob es für Anna eine Möglichkeit gibt, mit Sicherheit das Kästchen mit dem Gold zu erhalten.

3. Aufgabe

Während eines Ferienlagers gibt jeder Teilnehmer jedem anderen genau ein Foto von sich. Insgesamt werden 2450 Fotos verteilt. – Bestimme die Anzahl der Teilnehmer.

4. Aufgabe

Kurt spielt mit einem Satz Bauklötze.

a) Er hat genau einen Würfel mit der Kantenlänge 7cm, je fünf Würfel mit den Kantenlängen 4cm und 3cm, sechs Würfel mit der Kantenlänge 2cm und zwölf Würfel mit der Kantenlänge 1cm.
- Weise nach, dass Kurt aus diesen Spielwürfeln keinen vollständigen Quader bauen kann, wenn er dabei alle Würfel verwenden will.

b) Nun hat Kurt genau einen Würfel mit der Kantenlänge 6cm, acht Würfel mit der Kantenlänge 4cm, fünfzehn Würfel mit der Kantenlänge 2cm und zehn Würfel mit der Kantenlänge 1cm zur Verfügung.
- Untersuche, ob Kurt aus diesen Spielwürfeln einen vollständigen Quader bauen kann, wenn er dabei wieder alle Würfel verwenden will. Begründe deine Antwort auch hier.

Abgabetermin: **Freitag, 01. Oktober 2010**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Do / Fr, 7. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 20. August 2010, Physiksaal 1**

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 8

1. Aufgabe

Paul hat die rechts stehende Methode für das Quadrieren zweistelliger Zahlen entdeckt.

67^2
42
3649
42
4489

a) Erkläre diese Methode und berechne auf die gleiche Weise 59^2, 82^2 und 19^2.

b) Erkläre, warum dieses Rechenverfahren funktioniert.

2. Aufgabe

Ein Dreieck ABC hat die folgenden Eigenschaften:

(1) Die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind gleich lang.

(2) Die Winkelhalbierende des Innenwinkels BAC schneidet die Seite $\overline{BC}$ im Punkt E.

(3) Die Strecke $\overline{AE}$ steht senkrecht auf der Seite $\overline{BC}$.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Größe der Innenwinkel im Dreieck ABC eindeutig bestimmen lassen. Wenn dies der Fall ist, dann gib diese Winkelgrößen an.

3. Aufgabe

Auf einem Kreis k liegen in dieser Reihenfolge sechs paarweise voneinander verschiedene Punkte A, B, C, D, E und F.

a) Ermittle die Anzahl der Dreiecke, die jeweils drei dieser sechs Punkte als Eckpunkte haben.

b) Ermittle die Anzahl der konvexen Vierecke, die jeweils vier dieser sechs Punkte als Eckpunkte haben.

c) Ermittle die Anzahl der konvexen Fünfecke, die jeweils fünf dieser sechs Punkte als Eckpunkte haben.

Hinweis: Ein n-Eck $P_1P_2 \ldots P_n$ mit Ecken auf einem Kreis ist genau dann konvex, wenn seine Eckpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in dieser Reihenfolge auf diesem Kreis liegen.

4. Aufgabe

Jenny schreibt die ersten vier positiven Quadratzahlen auf: 1, 4, 9, 16. In der nächsten Zeile notiert sie jeweils unter dem Zwischenraum zweier benachbarter Quadratzahlen deren Differenz: 3, 5, 7. Darunter schreibt sie die Differenzen dieser Zahlen, also jeweils eine 2.

a) Bestätige am Beispiel der Zahlen 25 und 36, dass auch bei einer Verlängerung der ersten Zahlenfolge die Differenzen in der dritten Zeile nur noch den Wert 2 annehmen.

b) Führe eine entsprechende fortgesetzte Differenzbildung für die Folge der Kubikzahlen 1^3 bis 5^3 so lange durch, bis erstmals eine Zeile mit unveränderten Werten erscheint.
Beweise, dass diese Differenz auch bei der Verwendung weiterer Kubikzahlen auftreten muss.

Abgabetermin: **Freitag, 01. Oktober 2010**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Do / Fr, 7. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 20. August 2010, Physiksaal 1**

Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufen 9 und 10

1. Aufgabe

Jenny schreibt die ersten vier positiven Quadratzahlen auf: 1, 4, 9, 16. In der nächsten Zeile notiert sie jeweils unter dem Zwischenraum zweier benachbarter Quadratzahlen deren Differenz: 3, 5, 7. Darunter schreibt sie die Differenzen dieser Zahlen, also jeweils eine 2.

a) Bestätige am Beispiel der Zahlen 25 und 36, dass auch bei einer Verlängerung der ersten Zahlenfolge die Differenzen in der dritten Zeile nur noch den Wert 2 annehmen.

b) Führe eine entsprechende fortgesetzte Differenzbildung für die Folge der Kubikzahlen 1^3 bis 5^3 so lange durch, bis erstmals eine Zeile mit unveränderten Werten erscheint.

Beweise, dass diese Differenz auch bei der Verwendung weiterer Kubikzahlen auftreten muss.

2. Aufgabe

Man kann eine achtstellige Zahl bilden, indem man sich eine vierstellige Zahl ausdenkt und diese zweimal hintereinander schreibt.

Finde (a) die größte (b) die kleinste

von Eins verschiedene natürliche Zahl, durch die jede achtstellige Zahl dieser Form teilbar ist.

Hinweis: Eine Zahl heißt n-stellig, wenn sie n Ziffern besitzt, wobei die erste nicht Null sein darf.

3. Aufgabe

Es seien p und $p^2 + 2$ Primzahlen.

Finde alle Zahlen n mit n = 1, 5, 9, 13 , . . (also alle natürlichen Zahlen n, die bei Division durch 4 den Rest 1 lassen), für die auch $p^n + 2$ eine Primzahl ist.

Hinweis: Bestimme zunächst alle Primzahlen p, für die auch $p^2 + 2$ eine Primzahl ist.

4. Aufgabe

Gegeben sind ein Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt f sowie von den Eckpunkten verschiedene Punkte D auf $\overline{AB}$, E auf $\overline{BC}$ und F auf $\overline{AC}$. Letztere bestimmen zusammen mit den Eckpunkten des Dreiecks vier Teildreiecke ADF, DBE, FEC und DEF, deren Flächeninhalte in dieser Reihenfolge mit v, w, x bzw. y bezeichnet seien.

Die Punkte D, E und F haben weiter die folgenden drei Eigenschaften:

$$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$$

$$v + w = \frac{2}{5} f$$

$$x : y = v : w$$

Bestimme aus diesen Angaben v, w, x und y in Abhängigkeit von f.

Abgabetermin: **Freitag, 01. Oktober 2010**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Do / Fr, 7. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 20. August 2010, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2010

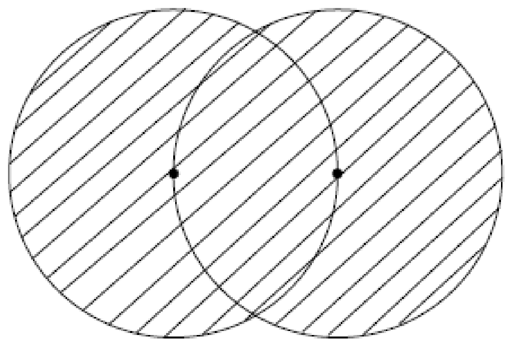
Bitte beachte: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Kurse 11 und 12

1. Aufgabe

Zwei Kreise mit gleichem Radius r schneiden sich so, dass der Mittelpunkt jedes Kreises auf dem Rand des jeweils anderen Kreises liegt.
(siehe nebenstehende Abbildung)

Bestimmen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der schraffierten Fläche.



2. Aufgabe

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{\sqrt{x+2}}{x} < 1$$

3. Aufgabe

Es seien p und $p^2 + 2$ Primzahlen.
Finden Sie alle Zahlen n mit n = 1, 5, 9, 13 , . . . (also alle natürlichen Zahlen n, die bei Division durch 4 den Rest 1 lassen), für die auch $p^n + 2$ eine Primzahl ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst alle Primzahlen p, für die auch $p^2 + 2$ eine Primzahl ist.

4. Aufgabe

In einem Kurbad gibt es 100 Duschkabinen. In jeder Kabine befindet sich ein Hahn, der die Wasserzufuhr zur Dusche dieser Kabine regelt. Durch ein Versehen bei der Installation setzt aber jeder Hahn außerdem auch die Duschen in genau fünf anderen Kabinen in Betrieb.

Beweisen Sie, dass die Kurverwaltung dann immer 10 Kabinen auswählen kann, in denen von der Fehlfunktion nichts zu bemerken ist, wenn die übrigen 90 Kabinen gesperrt werden.

Abgabetermin: Freitag, 01. Oktober 2010

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Do / Fr, 7. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 20. August 2010, Physiksaal 1**