Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2009

Bitte beachten: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 5

1. Aufgabe

Fünf Jungs gründen eine Band "Die lauten Mathematiker". Der Name ist entstanden, weil alle an der Mathematik-Olympiade teilgenommen und die ersten fünf Plätze belegt haben.
Die Jungen spielen Schlagzeug, Saxophon, Keyboard und Gitarre. Paul singt dazu.

(1) Für Stefan haben sich die Keyboardstunden gelohnt.
(2) Paul war traurig, dass er nicht Erster wurde.
(3) Nils ist nicht Erster, aber auch nicht Vierter geworden. Er spielt Schlagzeug.
(4) Timo ist Zweiter geworden, er spielt keine Gitarre.
(5) Guido freut sich auch über seinen fünften Platz.

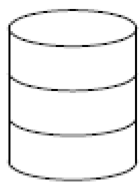
a) Welche Plätze haben die Jungen jeweils bei der Mathematik-Olympiade belegt?
b) Wer hat in der Band welche Aufgabe?

2. Aufgabe

Im Fußballverein "Schnelle Wade" trainieren insgesamt 72 Kinder, wobei es genau dreimal so viele Jungen wie Mädchen sind. Timo und Richard vergleichen die Anzahl der Tore, die sie in der letzten Saison bei Turnieren geschossen haben. Hätte Timo drei Tore mehr geschossen, wären es genau viermal so viele wie die Anzahl von Richards Treffer gewesen. Zusammen haben sie 22 Tore geschossen.

a) Wie viele Jungen und wie viele Mädchen trainieren in dem Verein?
b) Wie oft trafen Timo und Richard jeweils das Tor?

3. Aufgabe



Annabella feiert nächsten Monat ihren Geburtstag und hat über viele Wochen gleich große leere Konservendosen gesammelt. Die Dosen sind oben offen und haben keine Beschriftung mehr. Damit die Dosen etwas schöner aussehen, möchte Annabella drei Streifen auf die Dosen malen und zwar so, dass der Boden und der daran grenzende unterste Streifen nicht die gleiche Farbe haben und nebeneinander liegende Streifen auch nicht. Natürlich sollen alle Streifen und auch der Boden bemalt werden.

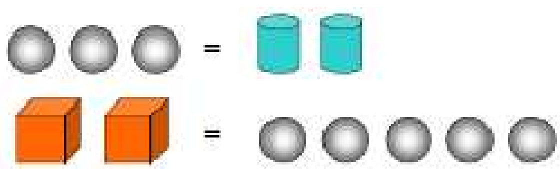
a) Annabella findet zu Hause nur die Farben Rot und Blau.
Wie viele Dosen könnte sie unterschiedlich bemalen?

b) Annabellas Mutter findet noch einen Topf mit gelber Farbe. Wie viele Dosen kann sie nun unterschiedlich bemalen, wobei nicht immer alle drei Farben verwendet werden müssen?

4. Aufgabe

Gezeichnete Gleichungen:
Drei Kugeln sind so schwer wie zwei Zylinder.
Zwei Würfel sind so schwer wie fünf Kugeln.

Wie viele Zylinder sind so schwer wie drei Würfel?



Abgabetermin: **Freitag, 02. Oktober 2009**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Freitags, 7. und 8. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 28. August 2009, Physiksaal 1**

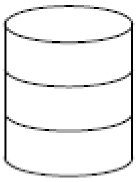
Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2009

Bitte beachten: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 6

1. Aufgabe

Annabella feiert nächsten Monat ihren Geburtstag und hat über viele Wochen gleich große leere Konservendosen gesammelt. Die Dosen sind oben offen und haben keine Beschriftung mehr. Damit die Dosen etwas schöner aussehen, möchte Annabella drei Streifen auf die Dosen malen und zwar so, dass der Boden und der daran grenzende unterste Streifen nicht die gleiche Farbe haben und nebeneinander liegende Streifen auch nicht. Natürlich sollen alle Streifen und auch der Boden bemalt werden.



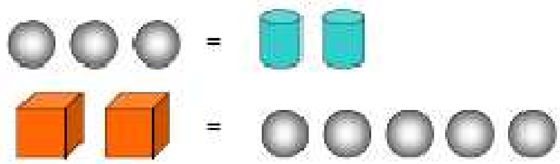
a) Annabella findet zu Hause nur die Farben Rot und Blau.
Wie viele Dosen könnte sie unterschiedlich bemalen?

b) Annabellas Mutter findet noch einen Topf mit gelber Farbe. Wie viele Dosen kann sie nun unterschiedlich bemalen, wobei nicht immer alle drei Farben verwendet werden müssen?

c) Bisher sind alle Dosen zwei- oder dreifarbig. Der Nachbar bringt noch die Farbe grün vorbei, und Annabella kann weitere Dosen, und zwar immer vierfarbig, anmalen. Wie viele neue Dosen kann sie so bemalen? Versuche, die Lösung durch eine Rechnung zu finden.

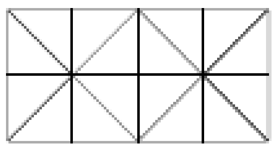
2. Aufgabe

Gezeichnete Gleichungen:
Drei Kugeln sind so schwer wie zwei Zylinder.
Zwei Würfel sind so schwer wie fünf Kugeln.
Wie viele Zylinder sind so schwer wie drei Würfel?



3. Aufgabe

Nebenstehende Abbildung zeigt ein Rechteck, das in 16 kleine Dreiecke zerlegt ist und das weitere Dreiecke unterschiedlicher Größe enthält, die sich aus den kleinen Dreiecken zusammensetzen lassen.



a) Wie viele unterschiedliche Dreiecksgrößen kommen vor?
Zeichne die Figur ab und kennzeichne je eines dieser Dreiecke farbig.

b) Gib für jede von dir gefundene Dreiecksgröße die Anzahl der vorhandenen Dreiecke an.

c) Zerlege das Rechteck so, dass sich aus allen Teilen ein Quadrat ergibt, und lege dieses Quadrat zusammen.

4. Aufgabe

Die neben stehende Figur besteht aus gleich großen Quadraten, in die jeweils eine Zahl eingetragen ist. Diese Figur soll in vier Teilfiguren zerlegt werden, die folgende Bedingungen erfüllen:

	12	14	13			
5	8	11	3	2	7	17
15	10	9	3	18	19	6
			4	16	8	

(1) Die Teilfiguren haben die gleiche Form, sie sind kongruent.

(2) Addiert man die in den Quadraten einer jeden Teilfigur eingetragenen Zahlen, dann sind diese Summen gleich.
Gib eine Zerlegung an, welche die genannten Bedingungen erfüllt.

Abgabetermin: Freitag, 02. Oktober 2009

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Freitags, 7. und 8. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 28. August 2009, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2009

<u>Bitte beachten</u>: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 7

1. Aufgabe

Die Firma Hausbau soll mit Baggern 10 gleich große Gruben für Fundamente von Einfamilienhäusern ausheben. Sie sollen in 7 Tagen fertig sein. Dazu müssen 8 Arbeiter täglich 8 Stunden arbeiten. Eine Grube wird vor Beginn der Arbeit abbestellt. Ein Arbeiter wird am Ende des 4. Tages krank, ein weiterer am Ende des 6. Tages. Beide fallen bis zum Ende der Bauarbeiten aus.

Können die 9 Gruben in den 7 Tagen ausgehoben werden, ohne dass Überstunden gemacht werden müssen?

2. Aufgabe

Die neben stehende Figur besteht aus gleich großen Quadraten, in die jeweils eine Zahl eingetragen ist. Diese Figur soll in vier Teilfiguren zerlegt werden, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Teilfiguren haben die gleiche Form, sie sind kongruent.

(2) Addiert man die in den Quadraten einer jeden Teilfigur eingetragenen Zahlen, dann sind diese Summen gleich.
Gib eine Zerlegung an, welche die genannten Bedingungen erfüllt.

	12	14	13			
5	8	11	3	2	7	17
15	10	9	3	18	19	6
			4	16	8	

3. Aufgabe

Ein Radrennfahrer hat sich vorgenommen, den zehn Kilometer langen Weg zwischen Adorf und Bestadt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km/h zu fahren. Nun führt die erste Hälfte des Weges bergauf, und auf dem Gipfel stellt der Fahrer fest, dass er bis dorthin nur eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 20 km/h erreicht hat. „Macht nichts“, denkt er, „dann fahre ich bergab eben 60 km/h.“

Gesagt, getan. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat er auf dem gesamten Weg von Adorf nach Bestadt tatsächlich erreicht?

Der Radfahrer wundert sich: "Wie schnell hätte ich denn bergab fahren müssen, um meine vorgesehene Durchschnittsgeschwindigkeit zu erreichen?"

4. Aufgabe

Die 1. Stufe der 49. Mathematik-Olympiade findet im Jahr 2009 statt. Jens behauptet: „Man kann die Jahreszahl 2009 so in zwei Summanden zerlegen, dass deren größter gemeinsamer Teiler die Zahl 49 ist.“ Als Beispiel für seine Behauptung gibt er 931 und 1078 mit der Summe 2009 und dem größten gemeinsamen Teiler 49 an.

a) Überprüfe die Behauptung von Jens.

b) Ermittle die Anzahl aller geordneten Paare (a; b) aus positiven ganzen Zahlen mit der Summe a + b = 2009 und dem größten gemeinsamen Teiler ggT(a; b) = 49.

c) Weise nach, dass es kein Zahlenpaar (a; b) gibt, für das a + b = 2010 und ggT(a;b) = 50 ist.

→ Abgabetermin: **<u>Freitag, 02. Oktober 2009</u>**

<u>Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG</u>

Freitags, 7. und 8. Stunde in den Physiksälen

<u>1. Treffen</u>: **Freitag, 28. August 2009, Physiksaal 1**

Bitte beachten: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 8

1. Aufgabe

Ein Gutsbesitzer musste wegen Futtermangels 50 Schafe verkaufen, da sonst sein Vorrat anstatt für 10 Wochen nur für 9 Wochen gereicht hätte.
Wie viele Schafe hatte der Gutsbesitzer vor dem Verkauf der 50 Schafe?

2. Aufgabe

Die 1. Stufe der 49. Mathematik-Olympiade findet im Jahr 2009 statt. Jens behauptet: „Man kann die **Jahreszahl 2009** so in zwei Summanden zerlegen, dass deren größter gemeinsamer Teiler die Zahl 49 ist." Als Beispiel für seine Behauptung gibt er 931 und 1078 mit der Summe 2009 und dem größten gemeinsamen Teiler 49 an.

a) Überprüfe die Behauptung von Jens.

b) Ermittle die Anzahl aller geordneten Paare (a; b) aus positiven ganzen Zahlen mit der Summe $a + b = 2009$ und dem größten gemeinsamen Teiler $ggT(a; b) = 49$.

c) Weise nach, dass es kein Zahlenpaar (a; b) gibt, für das $a + b = 2010$ und $ggT(a;b) = 50$ ist.

3. Aufgabe

Über ein **Dreieck ABC** ist bekannt:

(1) Die Größe des Winkels BAC beträgt 60°.

(2) Die Halbierende des Winkels ACB schneidet die Seite $\overline{AB}$ so in einem Punkt D, dass die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{BD}$ gleich lang sind.

Zeichne eine Planfigur und leite aus den Voraussetzungen die Größen der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks her.

4. Aufgabe

Alle Zahlen, die in dieser Aufgabe ermittelt werden sollen, sind positiv und ganz.

a) Ermittle alle dreistelligen Zahlen z, welche die drei Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen.

(1) Die Zahl z hat die Quersumme 14.
(2) Die Einerziffer von z ist doppelt so groß wie die Hunderterziffer.
(3) Vertauscht man die Einerziffer und die Hunderterziffer, so ist z um 198 kleiner als die Zahl, die man durch diesen Tausch erhält.

b) Ermittle alle vierstelligen Zahlen n, welche die folgenden vier Bedingungen (1), (2), (3) und (4) erfüllen.

(1) Die Zahl n besteht aus vier von Null verschiedenen Ziffern. Dabei tritt jede Ziffer höchstens einmal auf.
(2) Die Zahl n hat die Quersumme 18.
(3) Die Tausenderziffer von n ist um 1 kleiner als die Einerziffer.
(4) Schreibt man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge auf, dann ist die so entstehende Zahl um 729 größer als n.

Abgabetermin: **Freitag, 02. Oktober 2009**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Freitags, 7. und 8. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 28. August 2009, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2009

Bitte beachten: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufen 9 und 10

1. Aufgabe

Tina und Toni berechnen das Ergebnis einer Aufgabe mit verschiedenen Taschenrechnern.
Tina erhält 3,9999999, während Tonis Rechner die Zahl 4 anzeigt. Schnell sind sie sich einig, dass bei Benutzung eines Taschenrechners Rundungsfehler eine Rolle spielen können. Vielleicht stimmt eines der Ergebnisse, vielleicht liegt das richtige Resultat auch dazwischen.

Entscheide unter Verwendung von Umformungsregeln, welche der folgenden Rechenterme eine natürliche Zahl darstellen.

a) $(\sqrt{18}+\sqrt{8})^2$

b) $(\sqrt{2}+1)^2$

c) $(\sqrt{2}+1)^{16}$

d) $\sqrt{(15+\sqrt{104})\cdot(15-\sqrt{104})}$

2. Aufgabe

Finde alle ganzen Zahlen n, für die n^2-3 ein ganzzahliges Vielfaches von $n+3$ ist.

3. Aufgabe

Beweise:

a) Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann sind zwei seiner Höhen gleich lang.

b) Wenn zwei Höhen eines Dreiecks gleich lang sind, dann ist das Dreieck gleichschenklig.

4. Aufgabe

Bis in die siebziger Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts war Schwarz-Weiß-Fernsehen noch recht verbreitet. Daher musste bei den Fußballtrikots der Bundesliga darauf geachtet werden, dass sie schon bezüglich der Helligkeit möglichst gut unterscheidbar waren. Die Helligkeit messen wir auf einer Skala von 0 (schwarz) bis 1 (weiß). Alle Helligkeitswerte zwischen 0 und 1 erschienen dem damaligen Fernsehzuschauer als dunkleres oder helleres Grau.

Man will nun 18 Mannschaften mit Trikots (Hemd/Hose) ausstatten. Das Hemd und die Hose einer Mannschaft sollen jeweils einfarbig sein, müssen aber nicht die gleiche Farbe haben. Die Farben sollen so gewählt werden, dass sich bei je zwei unterschiedlichen Trikots wenigstens Hemd oder Hose in der Helligkeit um einen möglichst hohen Wert unterscheiden.
Die kleinste aller Differenzen der Helligkeitswerte zweier benutzter Farben bezeichnen wir mit h.
Wie groß kann h höchstens gewählt werden?

Abgabetermin: **Freitag, 02. Oktober 2009**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Freitags, 7. und 8. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 28. August 2009, Physiksaal 1**

Mathematik-Olympiade – Schulrunde 2009

Bitte beachten: Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Kurse 11 und 12

1. Aufgabe

Ermittle für jede reelle Zahl a alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\left|\,|x-1| + x - 3\,\right| < a$$

erfüllen.

Hinweis: Ermittle zunächst den Verlauf des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \left|\,|x-1| + x - 3\,\right|$.

2. Aufgabe

Finde alle ganzen Zahlen n, für die $n^2 - 3$ ein ganzzahliges Vielfaches von $n + 3$ ist.

3. Aufgabe

Der Inkreis des Dreiecks ABC berühre dessen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ in E bzw. F. Der Umkreis des Dreiecks BFE schneide die Gerade AC außer in F noch in M, und analog bezeichne N den von E verschiedenen Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks CFE mit der Geraden AB.

Beweise, dass die Gerade MN den Inkreis des Dreiecks ABC berührt.

Hinweis: Wende den Sekantensatz an und nutze die Symmetrie der Anordnung.

4. Aufgabe

Ulrike und Veit spielen mit Kieseln. Dazu füllen sie zwei Schalen mit jeweils der gleichen Anzahl n > 1 von Kieselsteinen und wechseln sich in den Zügen ab. Ulrike beginnt.

Derjenige Spieler, der am Zug ist, leert eine beliebige Schale und teilt den Inhalt der anderen Schale auf beide Schalen so auf, dass keine Schale leer bleibt. Wer keinen Zug mehr ausführen kann, hat verloren, und das Spiel ist beendet.

Untersuche, ob Ulrike oder ob Veit die Möglichkeit hat, den Sieg zu erzwingen. Gebe eine Spielweise an, mit der dies möglich ist.

Abgabetermin: **Freitag, 02. Oktober 2009**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG

Freitags, 7. und 8. Stunde in den Physiksälen

1. Treffen: **Freitag, 28. August 2009, Physiksaal 1**