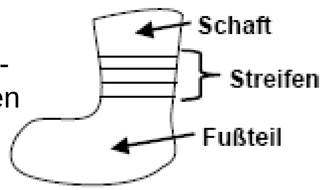
Mathematik-Olympiade 2008 – Schulrunde

Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 5

1. Aufgabe

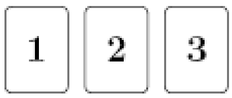


Oma Streifstrumpf strickt für Peppi neue Socken. Peppi hat drei Lieblingsfarben und zwar rot, gelb und blau, die alle in den drei Streifen vorkommen sollen.

a) Die Oma hat Wolle in diesen drei Farben gekauft.
Sie überlegt, wie der Streifenteil aussehen kann.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Oma Streifstrumpf dafür?

b) Fußteil und Schaft sollen jetzt die gleiche Farbe bekommen, aber die drei Streifen sollen erkennbar sein. Wie viele verschiedene Socken kann die Oma aus den drei Farben jetzt stricken?

2. Aufgabe



Mit diesen (nebenstehend abgebildeten) drei Kärtchen kannst du, wenn du sie nebeneinander legst, verschiedene dreistellige Zahlen bilden.

a) Gib alle diese Zahlen an.

b) Fasse in einer Tabelle zusammen, durch welche der Zahlen von 2 bis 12 deine gefundenen Zahlen jeweils teilbar sind.

Jetzt sollst du überlegen, welche Zahlen entstehen können, wenn du je zwei verschiedene deiner gefundenen Zahlen addierst.

c) Gib die größte und die kleinste so erzielbare Summe an.

d) Findest du unter den Zahlen aus dem Aufgabenteil a) Paare, deren Summe eine Zahl ist, bei der alle Ziffern gleich sind?

3. Aufgabe

Zeichne auf deinem Blatt jeweils ein Quadrat und ein Dreieck so, dass sie

a) keinen gemeinsamen Punkt,
b) einen gemeinsamen Punkt,
c) zwei gemeinsame Punkte,
d) drei gemeinsame Punkte,
e) vier gemeinsame Punkte,
f) fünf gemeinsame Punkte

aufweisen.

4. Aufgabe

Löse das folgende Kryptogramm (verschlüsselte Aufgabe). In jedem Kryptogramm bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{cccccc} & M & A & T & H & E \\ + & M & A & C & H & T \\ \hline & G & U & T & E & S \end{array}$$

Abgabetermin: Freitag, 26. September 2008

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG:

Freitags, 7. und 8. Stunde in den Physiksälen

Beginn: **Freitag, 22. August 2008**

Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 6

1. Aufgabe

Annika spielt mit Zahlen. Sie wählt sich eine Zahl, multipliziert sie mit 3, addiert zum Ergebnis 3, dividiert das neue Ergebnis durch 3 und subtrahiert schließlich von diesem Resultat 3. Dann möchte sie von vorn anfangen. „Eigentlich", so überlegt sie, „müsste ich nach diesen vier Rechnungen wieder bei der Anfangszahl ankommen. Aber wenn ich mit 5 angefangen habe, dann lande ich bei 3. Und wenn ich bei 7 anfange, lande ich bei . . . ¨ahhh. . ."

a) Wo landet Annika, wenn sie bei 7 anfängt?

b) Was passiert, wenn Annika mit größeren Zahlen anfängt – vielleicht schafft sie dann ihr ursprüngliches Ziel?

c) „Vielleicht sollte ich anders herum arbeiten", denkt Annika laut. „Zuerst mal 3, dann minus 3, dann geteilt durch 3, dann plus 3." Was geschieht jetzt?

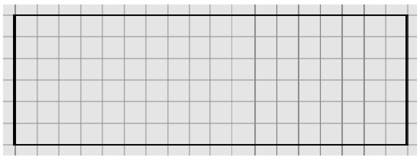
2. Aufgabe

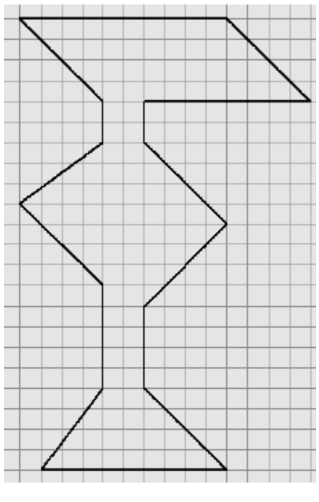
Löse das folgende Kryptogramm (verschlüsselte Aufgabe). In jedem Kryptogramm bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{ccccccc} & M & A & T & H & E \\ + & M & A & C & H & T \\ \hline & G & U & T & E & S \end{array}$$

3. Aufgabe

Der abgebildete Großbuchstabe F hat einen größeren Flächeninhalt als das dargestellte Rechteck.





a) Um wie viele Kästchen ist der Flächeninhalt des Buchstabens größer als der des Rechtecks?

b) Zerlege den Buchstaben so, dass man aus den erhaltenen Teilen das Rechteck legen kann und nur zwei Teile übrig bleiben. Versuche, mit möglichst wenigen Teilen auszukommen.

4. Aufgabe

Trage in die 9 Felder eines 3 × 3 – Quadrates die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so ein, dass die Summen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen untereinander gleich sind. Man nennt eine solche Anordnung ein magisches Quadrat, die „untereinander gleiche" Summe heißt magische Zahl des Quadrates. Berechne zunächst die magische Zahl.

Abgabetermin: Freitag, 26. September 2008

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG:

Freitags, 7. und 8. Stunde in den Physiksälen

Beginn: **Freitag, 22. August 2008**

Mathematik-Olympiade 2008 – Schulrunde

Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

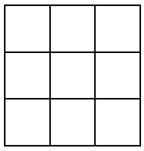
Aufgaben Klassenstufe 7

1. Aufgabe

Drei Hasen wiegen zusammen 10 Kilogramm. Der zweite Hase ist um ein Drittel schwerer als der erste Hase, der dritte Hase ist um ein Viertel leichter als der zweite Hase. Wie schwer ist jeder der drei Hasen? Weise nach, dass deine Ergebnisse die Angaben im Aufgabentext erfüllen.

2. Aufgabe

a) Trage in die neun Felder eines 3 × 3 – Quadrates die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so ein, dass die Summen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen untereinander gleich sind. Man nennt eine solche Anordnung ein magisches Quadrat, die „untereinander gleiche“ Summe heißt magische Zahl des Quadrates. Berechne zunächst die magische Zahl.



b) Untersuche, in welchen der neun Felder eines magischen Quadrates die Zahl 1 stehen kann.

c) Untersuche, welche Zahlen im mittleren der neun Felder eines magischen Quadrates stehen können.

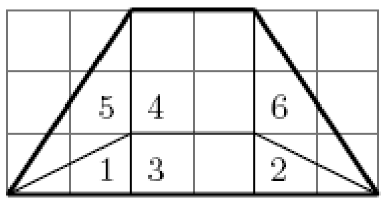
3. Aufgabe

Zeichne das rechts auf einem Quadratraster abgebildete gleichschenklige Trapez auf ein Stück Papier oder Zeichenkarton und zerschneide es in die angegebenen sechs Teile. Lege jeweils aus allen diesen sechs Teilen

a) ein Rechteck, das kein Quadrat ist,

b) ein Parallelogramm, das kein Rechteck ist,

c) ein rechtwinkliges Dreieck.



Dabei dürfen die Teile auch umgedreht werden. Die Aufgabe ist vollständig gelöst, wenn jeweils eine Möglichkeit gezeichnet wurde.

4. Aufgabe

Die folgende Aufgabe stammt aus dem Buch „Buch über die Grundlagen der Arithmetik und der Erbteilung“, welches in den Jahren 1030 bis 1060 in Damaskus geschrieben wurde.

„Ein Mann stirbt und hinterlässt einen Sohn und fünf Töchter. In seinem Testament hat er bestimmt, dass jede seiner Töchter von seinem Geld einen halb so großen Teil erben soll wie der Sohn. Außerdem soll noch ein Fremder ein Drittel des gesamten Vermögens erben, jedoch vermindert um den Anteil, den der Sohn bekäme, wenn der Fremde nichts erben würde.“

Welchen Anteil des Vermögens erbt der Fremde, welchen Anteil der Sohn und welchen Anteil jede der Töchter?

Abgabetermin: **Freitag, 26. September 2008**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG:

Freitags, 7. und 8. Stunde in den Physiksälen

Beginn: **Freitag, 22. August 2008**

Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufe 8

1. Aufgabe

Die folgende Aufgabe stammt aus dem Buch „Buch über die Grundlagen der Arithmetik und der Erbteilung“, welches in den Jahren 1030 bis 1060 in Damaskus geschrieben wurde.

„Ein Mann stirbt und hinterlässt einen Sohn und fünf Töchter. In seinem Testament hat er bestimmt, dass jede seiner Töchter von seinem Geld einen halb so großen Teil erben soll wie der Sohn. Außerdem soll noch ein Fremder ein Drittel des gesamten Vermögens erben, jedoch vermindert um den Anteil, den der Sohn bekäme, wenn der Fremde nichts erben würde.“

Welchen Anteil des Vermögens erbt der Fremde, welchen Anteil der Sohn und welchen Anteil jede der Töchter?

2. Aufgabe

Ein Flugzeug hat vor dem Start ein Gesamtgewicht von 100 Tonnen. Davon entfällt auf die Passagiere und das Gepäck zusammen ein Siebtel und es entfällt ein Drittel auf den Treibstoff, der für einen Nonstop-Flug von 3500 Kilometern ausreichend ist. Nach der Landung beträgt der Anteil von Passagieren und Gepäck am Gesamtgewicht zusammen ein Fünftel.

Wie lang war die Flugstrecke?

3. Aufgabe

Über ein Dreieck ABC und über die Punkte D, E und F wird vorausgesetzt:

(1) Der Punkt D liegt auf der Seite $\overline{BC}$ und die Strecke $\overline{AD}$ ist eine Winkelhalbierende des Dreiecks ABC.

(2) Der Punkt E liegt auf der Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ über B hinaus und die Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{BE}$ sind gleich lang.

(3) Der Punkt F liegt auf der Seite $\overline{AC}$ und die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{CF}$ sind gleich lang.

Beweise: Aus diesen Voraussetzungen folgt, dass die Dreiecke AED und ADF in den Größen ihrer Innenwinkel übereinstimmen.

4. Aufgabe

Als Polyeder bezeichnet man einen Körper, der von endlich vielen ebenen Seitenflächen begrenzt wird. Zeige, dass jedes Polyeder mindestens zwei Ecken hat, von denen gleich viele Kanten ausgehen.

Hinweis: Überlege, wie viele Möglichkeiten für die Anzahlen der von einer Ecke ausgehenden Kanten bei einer Eckenzahl n des Polyeders bestehen.

Abgabetermin: **Freitag, 26. September 2008**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG:

Freitags, 7. und 8. Stunde in den Physiksälen

Beginn: **Freitag, 22. August 2008**

Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Klassenstufen 9 und 10

1. Aufgabe

Über ein Dreieck ABC und über die Punkte D, E und F wird vorausgesetzt:

(1) Der Punkt D liegt auf der Seite $\overline{BC}$ und die Strecke $\overline{AD}$ ist eine Winkelhalbierende des Dreiecks ABC.

(2) Der Punkt E liegt auf der Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ über B hinaus und die Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{BE}$ sind gleich lang.

(3) Der Punkt F liegt auf der Seite $\overline{AC}$ und die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{CF}$ sind gleich lang.

Beweise: Aus diesen Voraussetzungen folgt, dass die Dreiecke AED und ADF in den Größen ihrer Innenwinkel übereinstimmen.

2. Aufgabe

Als Polyeder bezeichnet man einen Körper, der von endlich vielen ebenen Seitenflächen begrenzt wird. Zeige, dass jedes Polyeder mindestens zwei Ecken hat, von denen gleich viele Kanten ausgehen.

Hinweis: Überlege, wie viele Möglichkeiten für die Anzahlen der von einer Ecke ausgehenden Kanten bei einer Eckenzahl n des Polyeders bestehen.

3. Aufgabe

Zeige, dass es unendlich viele Beispiele für fünf aufeinander folgende natürliche Zahlen gibt, von denen keine eine Primzahl ist.

4. Aufgabe

Gegeben ist ein Dreieck ABC durch die Koordinaten seiner Eckpunkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem: A(0 | 0), B(117 | 44), C(21 | 72).

a) Beweise, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

b) Berechne die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U, des Höhenschnittpunktes H und des Schnittpunkts S der Seitenhalbierenden.

Abgabetermin: **Freitag, 26. September 2008**

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG:

Freitags, 7. und 8. Stunde in den Physiksälen
Beginn: **Freitag, 22. August 2008**

Mathematik-Olympiade 2008 – Schulrunde

Die Lösungsschritte sind mit Begründungen und notwendigen Nebenrechnungen vollständig und sprachlich richtig darzustellen.

Aufgaben Kurse 11 – 13

1. Aufgabe

Zeige, dass für jede reelle Zahl a die Ungleichung

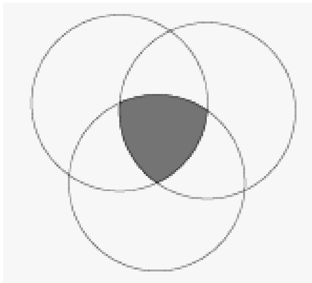
$$a \leq a^2 + \frac{1}{3}$$

erfüllt ist.

Gibt es reelle Zahlen, für die das Gleichheitszeichen gilt?

2. Aufgabe

Drei Kreise mit gleichem Radius schneiden sich so, dass der Mittelpunkt jedes Kreises auf dem Rand der beiden anderen Kreise liegt. (siehe Abbildung!)



Bestimme den Flächeninhalt der grauen Fläche.

3. Aufgabe

Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ \wedge \quad a \cdot x + b \cdot y &= 10 \end{aligned}$$

genau dann reelle Lösungen hat, wenn $a^2 + b^2 \geq 4$ gilt.

4. Aufgabe

Andrea und Beate spielen das **Rechteckspiel**. Dabei beginnen sie mit einem auf Kästchenpapier gezeichneten Rechteck aus m×n Kästchen als Spielfeld und ziehen abwechselnd, wobei Andrea beginnt.

Ein Zug besteht darin, ein Rechteck aus 2×2, 3×2, 2×3 oder 3×3 Kästchen des Spielfeldes auszuwählen und diese Kästchen einzufärben. Dabei darf das ausgewählte Rechteck keine bereits eingefärbten Kästchen enthalten.

Ist eine Spielerin am Zug und kann keinen Zug gemäß diesen Regeln ausführen, so hat die andere Spielerin gewonnen.

Untersuche für alle Paare positiver ganzer Zahlen (m, n), ob eine der beiden Spielerinnen durch eine geeignete Wahl ihrer Spielzüge den Gewinn erzwingen kann. Ist dies der Fall, so gebe jeweils eine geeignete Vorgehensweise an.

Abgabetermin: Freitag, 26. September 2008

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften am MPG:

Freitags, 7. und 8. Stunde in den Physiksälen

Beginn: **Freitag, 22. August 2008**